DOCUMENT RESUME

ED 137 118 SE 022 349

AUTHOR	Bauersfeld, H., Ed.; And Others
TITLE	Universitat Bielefeld, Institut fur Didaktik der Mathematik, Schriftenreihe des IDM, 5/1975. (University of Bielefeld, Institute for the Teaching of Mathematics, Series of Publications of the IDM, 5/1975).
INSTITUTION	Bielefeld Univ. (West Germany).
PUB DATE	75
NOTE	210p.; For related documents, see ED 133 178-184; Not available in hard copy due to marginal legibility of original document
EDRS PRICE	MF-$0.83 Plus Postage. HC Not Available from EDRS.
DESCRIPTORS	*Educational Research; Elementary School Mathematics; Elementary Secondary Education; Individualized Instruction; *Instruction; International Education; *Learning; *Mathematics Curriculum; *Mathematics Education; Research Reviews (Publications); Student Characteristics; Task Analysis; Textbooks
IDENTIFIERS	Research Reports; West Germany

ABSTRACT

This document contains seven papers (four written in English, the rest in German) concerning research on learning, curriculum, and instruction in mathematics education. Abstracts of all seven articles are provided both in English and in German. The four English-written papers discuss the following topics: (1) perspectives for modelling teaching and learning; (2) developments in studies of mathematical thinking and methodologies for classroom research and evaluation; (3) a report of a Swedish research project on curriculum and instruction in mathematics; and (5) task analysis in instructional design. The remaining papers cover research on the use of the mathematics textbook in the upper elementary grades, sources and conditions of the development of self-concept, and individualization and learning objectives in mathematics. (DT)

****
* Documents acquired by ERIC include many informal unpublished *
* materials not available from other sources. ERIC makes every effort *
* to obtain the best copy available. Nevertheless, items of marginal *
* reproducibility are often encountered and this affects the quality *
* of the microfiche and hardcopy reproductions ERIC makes available *
* via the ERIC Document Reproduction Service (EDRS). EDRS is not *
* responsible for the quality of the original document. Reproductions *
* supplied by EDRS are the best that can be made from the original. *
****

ED137118

U.S. DEPARTMENT OF HEALTH
EDUCATION & WELFARE
NATIONAL INSTITUTE OF
EDUCATION

THIS DOCUMENT HAS BEEN REPRODUCED EXACTLY AS RECEIVED FROM THE PERSON OR ORGANIZATION ORIGINATING IT. POINTS OF VIEW OR OPINIONS STATED DO NOT NECESSARILY REPRESENT OFFICIAL NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION POSITION OR POLICY

Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik

H. Bauersfeld

Schriftenreihe des IDM
5/1975

SE 022 349

2

Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik

Schriftenreihe des IDM
5/1975

Herausgegeben von: H. Bauersfeld
M. Otte
H.G. Steiner

(c) Copyright 1975, Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, 4800 Bielefeld 15, Heidsieker Heide 94

Gesamtherstellung: Robert Bechauf, Bielefeld

ZU DIESEM HEFT

Mit diesem Heft und dem letzten legt die Arbeitsgruppe F 1 Ergebnisse ihrer bisherigen Arbeit vor. Den äußeren Anlaß dazu bietet die vom 1. - 5.9.1975 in Wasserlos (Spessart) von der Gruppe veranstaltete interdisziplinäre Arbeitstagung über "Schlüsselvariablen im Mathematikunterricht". Die Teilnehmer waren, neben Mitgliedern des IDM:

Diederich, Jürgen, Prof.Dr., Universität Frankfurt (Main)
Easley, Jack A., Prof.Dr., University of Illinois, Urbana, USA
Eisner, Elliott W., Prof.Dr., Stanford University, Palo Alto, USA
Freudenthal, Hans, Prof.Dr., IOWO, Utrecht, Niederlande
Hopf, Diether, Prof.Dr., Max-Planck-Inst.f.Bildungsforschung,Berlin
Kilborn, Wiggo, Prof.Dr., Göteborgs Universitetet,Mölndal,Schweden
Kilpatrick, Jeremy, Prof.Dr., University of Georgia, Athens, USA
Lundgren, Ulf, Prof.Dr., Stockholms Universitetet,Stockholm,Schwed.
Resnick, Lauren B. Prof.Dr., LRDC, University of Pittsburgh, USA
Seiler, Thomas Bernhard, Prof.Dr., Freie Universität Berlin
Skowronek, Helmut, Prof.Dr., Universität Bielefeld
Suydam, Marilyn N., Prof.Dr., Ohio State University, Columbus, USA
Van Bruggen, Johan, Dr. IOWO, Utrecht, Niederlande

Die Tagung diente zur Vorbereitung eines Forschungs- und Entwicklungsprojektes zur Differenzierung im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe (DIMO), das die Stiftung Volkswagenwerk und das Rektorat der Universität Bielefeld inzwischen genehmigt haben. Die Referate der Tagung, inzwischen unter Einbeziehung der Diskussion und weiterer Literatur umgearbeitet, sind in diesem und dem vorausgehenden Heft 4 abgedruckt. Die übrigen Texte sind Arbeitspapiere, die teils zur Vorbereitung der Tagung, teils in der Nachbearbeitung entstanden sind.

Heinrich Bauersfeld Rainer Jansen

Jens Holger Lorenz Hendrik Radatz

INHALT CONTENTS

Communication between Educators Taking Different Perspectives

von J.A. Easley, Jr. 1

Thoughts on Individualized Instruction in Mathematics

von J.A. Easley, Jr. 21

Lehrbücher und ihre Realisierung im Mathematikunterricht der 5. und 6. Schuljahre - Ergebnisse einer Umfrage

von Rainer Jansen 49

A Contribution to the Analysis of Arithmetic Teaching and Learning

von W. Kilborn 75

Quellen und Bedingungen der Entstehung des Selbstkonzeptes

von Jens Holger Lorenz 97

Differenzierung und Lernziele im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe - Didaktogene Schwierigkeiten am Musterfall Bruchzahlen

von Hendrik Radatz 127

Task Analysis on Instructional Design: Some Cases from Mathematics

von Lauren B. Resnick 149

KURZFASSUNG DER BEITRÄGE IN DIESEM HEFT

J.A. EASLEY, Jr.: Kommunikation zwischen Pädagogen mit unterschiedlichen Perspektiven

Es werden sieben modellartige Perspektiven des Lehrens und Lernens vorgestellt, die unterschiedliche Aspekte des Unterrichts zu erfassen suchen. Die Abgrenzung und Gewichtung dieser Perspektiven wird vorgenommen und anhand von Beispielen von Forschungsansätzen erläutert. Speziell wird abschließend diskutiert, welche Ansätze sich für die Forschung zur Differenzierung im Unterricht am fruchtbarsten erweisen könnten.

J.A. EASLEY, Jr.: Gedanken zur Differenzierung im Mathematikunterricht

Der Artikel gibt einen Überblick über neue Entwicklungen von Untersuchungen mathematischen Denkens und verbindet sie mit der Mathematik und dem Schulcurriculum. Der Artikel endet mit einer Klassifikation der Methodologie zur Forschung und Evaluation im Klassenzimmer. In den verschiedenen Aspekten werden Beispiele von Fallstudien gegeben, die im Labor des Authors unternommen wurden.

R. JANSEN: Lehrbücher und ihre Realisierung im Mathematikunterricht der 5. und 6. Schuljahre - Ergebnisse einer Umfrage

Über 900 Lehrer verschiedener Schulformen wurden befragt, inwieweit die in den Lehrbüchern zum Mathematikunterricht der 5. und 6. Schuljahre angebotenen Inhalte tatsächlich behandelt wurden. Die Ergebnisse zeigen ein Überangebot an Lehrinhalten, das im Unterricht nur unzureichend realisiert wird. Der Stoffdruck geht am stärksten zu Lasten der Geometrie, während sich der 'Pflichtkanon' weitgehend auf den Bereich des Numerischen beschränkt.

W. KILBORN: Zur Analyse des Lehrens und Lernens von Arithmetik

Der Artikel gibt den Stand eines Forschungsprojektes zu Curricula im Mathematikunterricht in Schweden wieder. Besonderes Augenmerk wird auf den Prozeß des Mathematiklernens sowie seiner Einschränkungen im Unterricht gelegt. Theoretische Grundlagen werden skizziert und ein Diagnosemittel am Beispiel der Multiplikation natürlicher Zahlen vorgestellt.

J.H. LORENZ: Quellen und Bedingungen der Entstehung des Selbstkonzeptes

Der Artikel stellt verschiedene Modelle vor, die die Entstehung des Selbstkonzeptes zu erklären versuchen. Pädagogische Aspekte werden angeführt, um die Entscheidung des Authors zugunsten des Modells des symbolischen Interaktionismus und seine Verfeinerung zu begründen. Sich aus dem Selbstkonzept ergebende Attribuierungen von Erfolg und Mißerfolg werden diskutiert und mit anderen Variablen in Bezug gebracht.

H. RADATZ: Differenzierung und Lernziele im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe - Didaktogene Schwierigkeiten am Musterfall Bruchzahlen

Ausgehend von einer Analyse der Differenzierungspraxis in den Mathematiklehrbüchern der Orientierungsstufe wird auf Schwierigkeiten hingewiesen, die sich aus den verbindlichen Feinlernzielen der Rahmenrichtlinien im Hinblick auf die Variabilität didaktischer Verfahren und Modelle ergeben. Der Artikel geht auf das Verhältnis von didaktischem Konstrukt, Unterrichtsmethode und Lernzielen ein und stellt das sog. Mehrwegmodell als eine Alternative zur bisherigen Differenzierungspraxis und als ein variables Konzept für Lehr-Lernprozesse vor.

LAUREN B. RESNICK: Aufgabenanalyse in der Unterrichtsplanung: Einige Fälle aus dem Bereich der Mathematik

Aufgabenanalyse als Werkzeug der Unterrichtsplanung ist Thema dieses Artikels. Einige der wichtigsten historischen Versuche (assoziativistische/behavioristische, gestaltpsychologische, piaget'sche) werden beschrieben und für jeden Fall mathematische Beispiele angegeben. Die Nützlichkeit dieser Methoden für die Unterrichtsplanung wird bezüglich vier Kriterien untersucht, nämlich Unterrichtsrelevanz, psychologische Formulierung, Lehrbarkeit und Erkennen von Kompetenzniveaus. Eine detaillierte Diskussion rationaler und empirischer Analysen des Informationsprozesses für Unterrichtsabsichten schließt sich an. Sie beinhaltet eine Beschreibung empirischer Untersuchungen, die formale und informelle Aufgabenanalysen mathematischer Fertigkeiten zu validieren und erklären suchen wie einfache Addition und Subtraktion und verallgemeinerte "Lernen-zu lernen"-Fähigkeiten.

ABSTRACTS OF THE ARTICLES

J.A. EASLEY, Jr.: Communication between Educators Taking Different Perspectives

Seven perspectives for modelling teaching and learning are given that can be used to cover different aspects of the educational process. These perspectives are defined and elucidated by means of examples from research paradigms. Finally, the most fruitful perspectives for research related to individualized instruction are discussed.

J.A. EASLEY, Jr.: Thoughts on Individualized Instruction in Mathematics

The article summarizes recent developments in studies of mathematical thinking, relating it to the nature of mathematics and the school curriculum. The article ends with a classification of methodology for classroom research and evaluation. Examples of case studies undertaken in the author's laboratory are given to elucidate the different aspects.

R. JANSEN: Textbooks and their Realization in Mathematics Instruction in Grades 5 and 6

More then 900 teachers of different types of schools answered a questionnaire as in which manner and amount the contents offered in the textbooks for mathematics in grades 5 and 6 really were instructed. The results show an excessive supply of content that only is realized insufficiently. The pressure of content mostly cuts out parts of the geometry whereas the 'core' is restricted to the numerical area.

W. KILBORN: A Contribution to the Analysis of Arithmetic Teaching and Learning

The article summarizes the results of a research project in Sweden on curriculum and instruction in mathematics. The process of mathematics learning as well as its constraints in the classroom setting are stressed. After an explication of the underlying theory, a means for diagnosis is given together with an example of its use in a situation of multiplication of natural numbers.

J.H. LORENZ: Sources and Conditions of the Development of Self-Concept

The article introduces several models that have been proposed to explain the development of self-concept. Educational reasons are given for the author's preference for the symbolic interactionistic model and its refinements. Attribuations of success and failure resulting from the self-concept are discussed and related to other variables.

H. RADATZ: Differentiation and Learning Objectives in Mathematics for 5. and 6. Grade Students

Starting from an analysis of the reality of differentiation (individualization) in the mathematical school-books of grade 5 and 6 the author points out the problem which results from the relation between precise objectives in the syllabus and the variability in didactical methods and models. The article discusses the relationship between didactical constructs, instructional methods and the learning objectives and presents the so-called multipath modell as an alternative to the present differentiation practice and as a variable concept for the teaching-learning process.

LAUREN B. RESNICK: Task Analysis in Instructional Design: Some Cases from Mathematics

Task analysis as a tool in the design of instruction is the subject of this paper. Some of the major historical approaches (associationist/behaviorist, gestalt, and Piagetian) are described, in each case using examples from mathematics. The usefulness of these approaches to instructional design is evaluated on the basis of four criteria, namely, instructional relevance, psychological formulation, instructability, and recognition of stages of competence. A detailed discussion of rational and empirical information-processing analyses for instructional purposes follows. It includes descriptions of empirical studies carried out to validate and elucidate formal and informal task analyses of mathematical skills, such as simple addition and subtraction, and generalized "learning-to-learn" abilities.

COMMUNICATION BETWEEN EDUCATORS TAKING DIFFERENT PERSPECTIVES

J.A. Easley, Jr.

The DIMO Workshop, as designed and as experienced, involved an extraordinary high quality of communication between persons of different theoretical perspectives. It raised my hopes that such multiperspective interaction could become a mainstay of educational thinking, and that its great advantage could be generally recognized and worked for. If such is to happen, we need to learn not only to accept the questioning of some of our most cherished assumptions about human knowledge and methods of inquiry, but we need to develop strategies and methods of helping others to see how things look from different perspectives. The methodology for doing this is evidently quite different from that employed when a common Weltanschauung is operating.

1. SOME COGNITIVE PROCESSES AMONG EDUCATORS

The study of cognitive psychology leads sooner or later to reflection on how we ourselves come to think about human cognition (especially teaching and learning) in the particular ways we do. Just as children assimilate aspects of their environment to their cognitive systems without being aware that something in the organization of their minds is limiting what they can assimilate and how it is perceived, and blinding them to other things, so educational practitioners and researchers adopt certain ways of looking at schooling which blind them to other ways of seeing schooling. The point is not to try to convert educators to a particular other way but to free them to choose whatever way of seeing makes for the best advantage in their situation. When we see someone

Key Metaphors	1. Combinations: Mixtures	2. Sampling: Random Processes (Dice)
Math. Models	Combinatorial, multidimensional (regression, factor analysis, ANOVA MANOVA)	Inferential statistics Pearsonian-Fisherian-Bayesian
General types of questions asked:	What variables relate to this? What % variance (σ^2) in the dependent variables is accounted for by the independent variables?	What is the error variance? What is the probability this result is a sampling fluctuation?
Solutions to problems: (1) What makes t a successful teacher of x to y? (2) Why can't p (Johnny, Suzy) do q (read, add, spell, think)? (3) Why can't t teach more successfully?	(1) Interaction of teacher variables with pupil variables. (2) p is paying attention to the wrong set of variables relating to q. (3) Same as (1) above.	(1) Chance matching on population parameters (2) p has not had a sufficiently broad sample of experience of q to generalize correctly. (3) Same as (1) above.
Ways of using knowledge	Control combination of the independent variables	Use data to estimate prob. of success in actions planned

Figure I Seven Modelling Perspectives in Teaching and Learning

1. Combinations: Mixtures	2. Sampling: Random Processes (Dice)	3. Feedback: (Thermostat) Coding-Decoding
Combinatorial, multidimensional (regression, factor analysis, ANOVA MANOVA)	Inferential statistics Pearsonian-Fisherian-Bayesian	Systems analysis Communication theory Automato theory
What variables relate to this? What % variance (σ^2) in the dependent variables is accounted for by the independent variables?	What is the error variance? What is the probability this result is a sampling fluctuation?	What are the subsystems? What are the feedback loops? What is the goal? What is the program for information processing?
(1) Interaction of teacher variables with pupil variables. (2) p is paying attention to the wrong set of variables relating to q. (3) Same as (1) above.	(1) Chance matching on population parameters (2) p has not had a sufficiently broad sample of experience of q to generalize correctly. (3) Same as (1) above.	(1) Efficient coding and decoding systems (verbal and nonverbal) (2) p is using the wrong codes and has poor error-detection feedback from performance of q. (3) Poor feedback: coding and decoding sysems inadequate.
Control combination of the independent variables	Use data to estimate prob. of success in actions planned	Adjust system for more efficient control

Continuation of Figure 1

4. Games: Plays, Rules, Teamwork	5. Critical thinking, Operations, Criteria Consistency	6. Language games Logic as syntax
Theory of games Strategies	Inferential logic Reduction sentences Artificial languages	Wittgenstein and other Oxford philosophers ordinary language analysis
What are the rules participants play by? What moves are made in a given situation?	What are the criteria for use of terms? What is a consistent formulation?	What is the "logic" of the ordinary language usage of "teach", "explain", "learn", etc.?
(1) Mutually accepted rules interaction t's creative "plays" t's avoidance of "warefare" (2) p is playing wrong game, "guessing answers rather than figuring them out. (3) Hasn't agreed on rules with pupils, poor "plays" poor "sportsmanship" (e.g., sense of humor, give and take)	(1) t's consistent use of proper language, and encouragement of y to reason about x. (2) Pupils are using poor language, reasons, and criteria. p is confused. (3) Noncritical thinking results in confusion.	(1) Society agrees on concept of "teaching" with t. y agrees on x-language game with t. (2) Confusion of meanings and usage of language. (3) Word magic and other philosophical confusions.
Follow optimum strategy	Use language consistently	Avoid language problems by understanding language game

5. Critical thinking, Operations, Criteria Consistency	6. Language games Logic as syntax	7. Dynamic Structures (embryology)
Inferential logic Reduction sentences Artificial languages	Wittgenstein and other Oxford philosophers ordinary language analysis	Kant Piaget Witz
What are the criteria for use of terms? What is a consistent formulation?	What is the "logic" of the ordinary language usage of "teach", "explain", "learn", etc.?	What are the structures (dynamical forms) of the ideas and feelings underlying (assimilating) human behavior? What can they assimilate?
(1) t's consistent use of proper language, and encouragement of y to reason about x. (2) Pupils are using poor language, reasons, and criteria. p is confused. (3) Noncritical thinking results in confusion.	(1) Society agrees on concept of "teaching" with t. y agrees on x-language game with t. (2) Confusion of meanings and usage of language. (3) Word magic and other philosophical confusions.	(1) Match is good between t's behavior re x and y's structures. (2) p assimilates experience to structure that don't function in q. (3) Unnatural, forced patterns of behavior due to mismatched structures.
Use language consistently	Avoid language problems by understanding language game	Improve sensitivity of perception and responsiveness through conceptual enrichment

operating outside our own perspective it may make us panic, but we should rejoice.

Figure 1 lists seven perspectives on teaching and learning, beginning with the general metaphors which dominate each perspective and comparing and contrasting them in other ways (see Easley, 1976, for detailed explanation). If you consider the kinds of mathematical models listed under the first and second metaphors, you will notice that they are rarely referred to as anything but perfectly general methods. I don't mean that they can't be used in any subject matter and in connection with any kind of inquiry; all seven of the perspectives have that kind of generality. What I want to point out is the fact that, when you use them, they shape the inquiry by suggesting certain general questions and by suggesting certain kinds of answers to look for in a given problem. The table of seven perspectives is roughly autobiographical in character, for I have been at one time seriously committed to working within each one of them. Instead of thinking that we should turn to statistics when we want to persuade our audience of the value of our observations, we should recognize that every perspective has its own models or disciplined procedures to turn to and we should try to choose those which are most appropriate. Before considering the question of appropriateness of different perspectives for different circumstances, it is important to consider the variety of different ways in which one perspective can function in education. We choose the first perspective as the most striking example of this penetration.

First, the combinatorial models perspective relates closely to the consideration of educational policies. If we know, in general, that there exists a relation between certain variables, conceived as a set of ordered n-tuples, then those variables we can control directly might give some indirect control over those we cannot

control directly. Researchers are often asked to study the relations between certain variables in order that administrators and other decision makers can be informed of the policies they might follow to maximize certain desired ends. A case in point is the study of mixtures of ethnic groups and social classes in schools (see Coleman, 1975). The quest for the best methods of teaching various topics, the best preparation of teachers, the best selection of students for certain programs are obvious examples of this same perspective. In these cases the best policy is thought to bring about an optimum mix of those variables that can be controlled, and the deviations from optimum results are thought to be the result of random fluctuations in those variables or to uncontrolled variables. In agriculture and medicine, where this type of analysis has been used quite successfully, physiologists understand the mechanisms that take a given mixture of active ingredients and deliver it to the spot in the plant or the body where it is needed. In education, we don't know as much about the mechanism of coming to understand school subjects and how the different effects we observe are produced, so changing the mixture of pupils, teachers, materials, or time allotments doesn't produce the desired change in learning as reliably as it does in agriculture and medicine.

Second, one often thinks of the search for relations between variables as a general method for learning about different subject matters. This may be most common in teaching science, where the teacher may urge students to conduct their own inquiry, measuring what they can measure and trying to find, by graphs, tables, and the like, how the measurements are related. In mathematics classes, direct and inverse proportion, functions and their inverses, the whole theory of binary relations treated as sets of ordered pairs of real numbers can be taught, not just as analytic geometry, but as a general method of handling quantitative data. It was quite surprising to Max

Beberman, for example, when engineers and scientists objected to this way of preparing students for the calculus. Although the set-theoretic approach to mathematical relations was familiar in mathematical circles, engineers and physicists didn't regularly conceive of them in this way and felt their own ways were more useful in solving applied mathematical problems. At best, if you did make measurements and plotted graphs, they were supposed to make you wonder about the underlying processes.

A third way in which teachers use this kind of thinking is in looking at learning as the result of a combination of study habits, intellectual abilities, exposure to the proper materials, explanations, and the like. A fourth way is involved when psychologists think of the formation of concepts as the discovery of relations between attributes of instances (Bruner, Goodnow, & Austin, 1956). Thus, mammals are fur bearing, live bearing vertebrates who suckle their young. Conjunctive concepts are easy to grasp on this conception but disjunctive ones difficult. Presumably, to most people, a fraction is a number of parts of a whole that has been divided into a larger number of parts of equal size, or a pair of positive integers written above and below a horizontal line, or a small portion of a larger quantity. Most of our dictionaries list alternative meanings, so disjunctive concepts seem to be popular, despite the alleged difficulty in acquiring them.

So we see that the combinatorial, multivariable way of thinking turns up in all kinds of educational thought and takes on many forms. Sometimes it is presented as though there were no other way to conceive of the phenomena in question. To illustrate how the perspective changes when another type of model is adopted, I shall describe what I take to be the same phenomena mentioned above in terms of perspective number seven.

Here, the metaphor is that of a process, partly or mainly internal, which carries through in a flexible way to some natural termination. In the first situation, an administrator meets prospective teachers, prospective students, or sales representatives of prospective textbook series, etc. He has to decide whether to accept it into his school. He goes through a process of trying out some of the interactions he knows can cause difficulty in his school. He searches for those which might not work smoothly with the candidate. He also notices what kinds of interactions look promising. As he interacts with candidates, their representations on paper, or with sales persons, the administrator tries to play the roles of staff persons known to him who might challenge such candidates should they be accepted as a part of the school. He tries to integrate these interactions as he scans the picture he has of the school to see what compensates for what and test this overall interaction as to whether it is beneficial or not.

In the second situation, the teacher tries to induce a habit in his students of studying the natural interactions of objects in the laboratory. They are urged to record the interactions of these objects in the most natural way possible. Often, it will be possible to arrange for a moving object to draw some kind of graph of its motion. This graph may be given some additional interpretation with axes, etc. The physical quantities shown may be correlated, not only with time, but with each other as well. Explanations of the correlations noted can be sought in the natural dynamics (often temporal dynamics) of the interaction. A constructed graph can be studied in terms of the human process of generating it. Can it be constructed by compass and ruler, by plotting, by the use of a string? Could it have been constructed by a natural process such as the rolling of a ball? Relations and functions can be studied geometrically by their process of construction and algebraically

by a calculational process. Algebra and geometry can then be linked by analytic geometry.

In the third situation, the new way is to think of learning as a process of gaining insight and skill by interacting with objects, books, and other people. The student's understanding of a new idea may take the form of a sudden rush of clarity and confidence. This process may not be present the next day and may recur only through similar processes that led to it the first time. The feeling of clarity is a part of the process which only gradually leads to codification in more accessible forms. But then the pleasure is gone out of it unless it can become part of new processes. Mammals can be seen in terms of their evolution from unspecialized reptiles. Or they can be grasped in terms of their life cycles, compared with those of reptiles, or in other more dynamic ways. Fractions, like "outs" in baseball, are learned in context as an idea in a natural process of dividing, sharing, and gradually formalizing the language of and notation for this idea. Generalization is the ability to use the organizing processes of familiar experiences in coping with new phenomena. It is a courageous, joyful activity, although often it is recognized as inappropriate, and may, in such cases, be abruptly stopped in mid-process. Artists, jazz musicians, and open-style educators often think and speak about their work in process terms. It can also be given more precise and rigorous treatment (see Witz, 1970; Witz & Easley, 1976).

2. GENERAL OBSERVATIONS ABOUT THE SEVEN PERSPECTIVES

Persons for whom one (or possibly two) of the perspectives is (are) their dominant view(s) are likely to make use of the technical procedures and mathematical models of other perspectives without abandoning the basic metaphors of their dominant view. For example, cybernetic or infor-

mation processing views are often accompanied with discussions of variables, correlations, or even some formal model of multiple-variable analysis. Random sampling and statistical inference may also be used in some research on information processing. Such workers may be quite oblivious to the conflicts between constraints of the information processing conception and the assumptions of independence of variables in the statistical approach. As long as the work is being carried out in a quasi-heuristic mode, worrying about such details may not create any great concern.

Another example would be a measurement specialist making use of Piaget's clinical observations, treating them as tests (absolute measurements, according to Cronbach, 1972, or power tests according to another, or a new intelligence scale according to Kohlberg, 1971). The notion that a person parameter is being observed, in itself, does not violate the Piagetian clinical perspective, but the notion that a few key questions constitute a clinical interview, which might be inferred from the view that all of the interview that counts is what is shown in a typical Piagetian research publication, arises from a test perspective that is quite foreign to Piaget's structuralist persuasion. Thus, it might be difficult for a test-oriented researcher to imagine why Geneva psychologists would fail to report at all those portions of interviews in which a subject who was later classified at one level actually gives responses characteristic of another level. One can, however, find clear references to the fact that children who fluctuate from a conserving to a nonconserving response may sometimes be classified as conservers, sometimes as nonconservers, and very often as in a transitional stage (Piaget and Szeminska, 1941, Piaget and Inhelder, 1962). However, the absence of such references in subsequent reports does not mean that the criteria have shifted to standards nearer to those of the psycho-

metricians. Rather, it probably means that the clinical interview method and its peculiarities are now taken for granted in reporting additional work.

As an educator working mainly within approach number seven, the dynamic structuralist perspective, I am struck by the fact that I feel unhappy to endorse or use approaches one, two, and three, except when they are carried out in a very careful or rigorous way. If I am careful in thinking through statistical analyses (e.g., Kamara & Easley, 1976, Section 3), I can protect my basic metaphors. But if someone uses statistics or cybernetic models loosely or in a heuristic way, it constitutes an objectional kind of mixed metaphor. In fact, I feel rather distressed at the common violations of statistical modelling assumptions I see. Now that I have recognized that kind of relation between my own and others' perspectives, I am led to the conclusion that it must be symmetrical. This means that I can understand the objection that people working in the more external traditions have to the way in which Piaget and ot and others in perspective seven write. They can assimilate into their perspectives only those tasks which are treatable as tests (Lunzer, 1976), only those models which are used for calculation (Easley, 1964), and only those logical formulae which are assimilable as tests for the consequence relation. If they recognize that something is significant in the work of Piaget, as many do, they only take over these kinds of technical details and do not assume the general metaphor of dynamic structures.

We can see that each perspective has a sophisticated, even mathematical development, with aspects of very precise methodology. But also, we see that each perspective has a broad, heuristic way of thinking which determines what is seen as important, how it is seen, and how the mathematical or other sophisticated models are to be used (e.g., for calucaltion or otherwise). We have seen

that departures from precision, valuable as they are to the workers within a given perspective for purposes of working out new problems, are seen as vague and undisciplined and may be quite disturbing to those not comfortable with the metaphor of the perspective itself. At the level of mathematical models, communication is at least possible, even though disagreement is common (Ennis, 1975). But at the level of vague, heuristic thinking so necessary to arrive at the choice of the best perspective for a given phenomenon, communication rarely occurs.

Perspectives one and two are generally thought to be parts of a general scientific method, but that is only to say that these two perspectives are widely accepted in the field of educational research and development. They overlap with what CRONBACH calls the two disciplines of scientific psychology (1957) and are subject to his criticism of them (1975).

In the natural sciences, however, these two perspectives are not at all the universal ones, but they are used as judged appropriate to the type of theory being developed. They have a metaphorical character like the rest. This can also be seen in the uses made or contemplated for knowledge of these types (see Figure 1). Most of the other perspectives have very important analogues in the natural sciences.

From perspective number seven, I now see clearly the profoundly limiting cognitive effects of the other six, each of which I once held in very high regard. However, I infer by symmetrical considerations that this one must also be limiting my perception, even though I can't feel it, but then neither do most people working in the other perspectives feel their limitations. I believe that we won't ever attain a unified perspective like a paradigm in the natural sciences that Kuhn describes. However, we

should not only be content with this multiconceptual situation, we should cherish it, because education and all the social sciences as well are subject to what we may call internal comparisons. A schclar can always make the judgment that he doesn't feel that the model he's currently working in fits his view of life -- and he can propose a new metaphor. All of this is a lengthy preface to urging readers to consider what can be seen from perspective number seven, not by assimilating remarks to a more familiar perspective, but by moving into a new metaphor informally and heuristically, in the spirit of heuristic eclecticism, that I think educational thought very much needs.

3. INDIVIDUALIZED MATHEMATICS EDUCATION FROM PERSPECTIVE SEVEN

As Mr. Freudenthal told us, children doing arithmetic don't do what teachers and other mathematics educators usually think they have been taught to do. As Suppes, Groen and Resnick have clearly shown in several studies, addition and multiplication tables are not learned as sets of simple associations, but involve some kind of algorithm (see also Erlwanger, 1973, 1974). Why this disparity between what is taught and what is learned? From perspective seven, we ask what are the natural processes which assimilate teaching acts and instructional materials and produce responses to clinical interviews?

Consider the type of responses that Eugene Nichols has been getting in videotaped interviews on questions like this one: 8 = 6 + ? Ans. 14. From several perspectives, this stimulus configuration has not been sufficiently taught to have a correct response. From a logical or linguistic perspective, we can say that the child obviously knows that 8 + 6 = 14, and presumably also knows that 6 + 2 = 8, but is having a linguistic problem.

David Page might recommend our asking, "What is 8 + 6?", as a second question with the expectation that the child might respond with the answer to the previous question. However, after observing Nichols' tapes at some length, I conclude that that is not the problem. The problem has to do with the way you write what is in your head. For the child will often correct the writing when it is pointed out and make it read 8 + 6 = 14, saying that it was written wrong.

Now, reading the problem and writing it are obviously different processes. Reading by skimming is a well-known phenomenon in children and adults, although elementary school instruction in reading assumes that it should not be encouraged. It can and does lead to errors in children and adults. In adults, one form of these errors is called the proof-readers' fallacy: Having received a correct and meaningful meaning from the act of reading a sentence does not mean that what was written on the page was correct. For example letter and even word inversions are often undetected. Some process like this must be going on as children read arithmetic problems. The inscription makes sense only as it is assimilated. Most children assimilate sentences to the process of finding a sum. They do it. When discrepancies are pointed out, they assimilate the sentence to the process of writing a sum, they correct it.

There is no process available that interprets a sentence to discover the meaning the author intended. Either it has whatever meaning it has for them or it is unassimilated and gives no response. If they read it over and over they might create a new meaning structure in the process, but this is difficult to do when the meaning is clear and automatic. The internal dynamic structures determine what information is received, and so we might say that the "information processing structure" admits only the information it can process -- does so instantly -- and ignores

whatever might be information to someone with another structure. So the information processing is not the interesting aspect of what is going on; it is the information determining process of assimilation. That is the fundamental cognitive process that we are dealing with. The error in reading the problem is a cognitive error even though the child knows the relevant facts of arithmetic and makes no cognitive error in that sense. It is a cognitive process blinding the child to that which a different cognitive process in us (decoding, deciphering, etc.) makes plainly obvious to us.

The well known phenomenon, that a child will respond to a different question than the one asked, makes me feel that the information is "projected" onto the environment by the child's structures rather than processed by them. The inventions of which Lauren Resnick speaks, and many more I've seen, are easier for me to think of that way too. However, I reiterate, the key question is to ask which perspective of those available to us to try on gives the most meaningful and helpful view? This will require extended debate and discussion.

It has also been made abundantly clear to me from reports by Dieter Hopf, Ulf Lundgren, and Wiggo Kilborn that teachers also project their structures on their environment, thereby determining the various kinds of Fehler in their pupils. Also, their internal dynamic structures can change and produce instant changes in behavior without practice. The example of the teacher who observed Lundgren and Kilborn at work and caught on to their system without having it explained impressed me. It gave me hope that the kind of creative mathematics I proposed in my handout at the workshop is also possible to be caught in some such manner. For these important phenomena, neither cybernetics, combinatorial mathematics, probability nor logic have much to offer. The modelling of the dynamical structure I speak of is too little developed, however, to im-

press those who are unwilling to take a heuristic peek through the structuralist's eye glasses.

I recommend to the DIMO project that, in anticipation of learning something about the limitations of my own view of the problem, it undertake the following program:

(a) Work with and tape record a small class of children of the Orientierungsstufe to discover their cognitive processes in typical mathematical problems and the potential for new mathematical development, e.g., in physical phenomena, exposing them to but not insisting on standard terms.

(b) Work with and tape record a small group of teachers on their perceptions of what happens in (a), exposing them to, but not insisting, on the alternative interpretations and developments.

(c) Work with and tape record a small group of teacher educators (supervisors, etc.) on both materials recorded in (a) and (b) and invite their perceptions of what is going on. Expose them to but don't insist on certain possible alternative roles.

(d) Put on workshops with representatives of the many roles people play in schooling (pupil, teacher, parent, teacher educator, mathematician, school principal, superintendent, and school board member - to give the American roles) to produce the units and materials needed and the theory needed as well as the inservice training program. The resulting changes won't be uniform, but the project will learn a lot, and so will the rest of us.

If we represent external to internal emphases in per-

spectives on the horizontal dimension and the range from formal analysis to informal intuitive thought on the vertical dimension (see Figure 2), the portion of the rectangle in which I feel most comfortable is that triangle lying above the cross diagonal (broken line). That is, I appreciate the full range from informal to formal in perspective seven and only the most formal level in perspective number one (although I am using it very informally right now in discussing this diagram). I am not surprised on reflection to discover that educational research occupies the full range of the first two columns but mainly trusts only the most formal level of the others.

The informal, evaluation approaches (Stake, 1975) are divided from them by a barrier along the main diagonal (solid line). However, I don't think any of the groups is operating soundly. Each is bound by the "law of the hammer".[1] The best approach would be to become eclectic at the informal level, trying out the general perspectives on the problem at hand phenomenologically. After locating that perspective which gives the best fit, with the concerns and felt needs of the participants, then more formal versions could be tried as needed, e.g., to communicate with those of other persuasions.

Parallel processing models should be considered creatively in attempting to represent the "metagnosis" that we feel more deeply represents the process we hope to cultivate in mathematics classes. Essentially (see Slotnick, 1971), parallel processing computer programs are made up of many separate programs which communicate with each other's memories. They not only solve difficult classical problems more efficiently than sequential programs because decisions can be made to the same end by the separate part of the parallel program without waiting for the others to be completed, but these programs appear promis-

1) When you have a hammer, everything needs to be hammered.

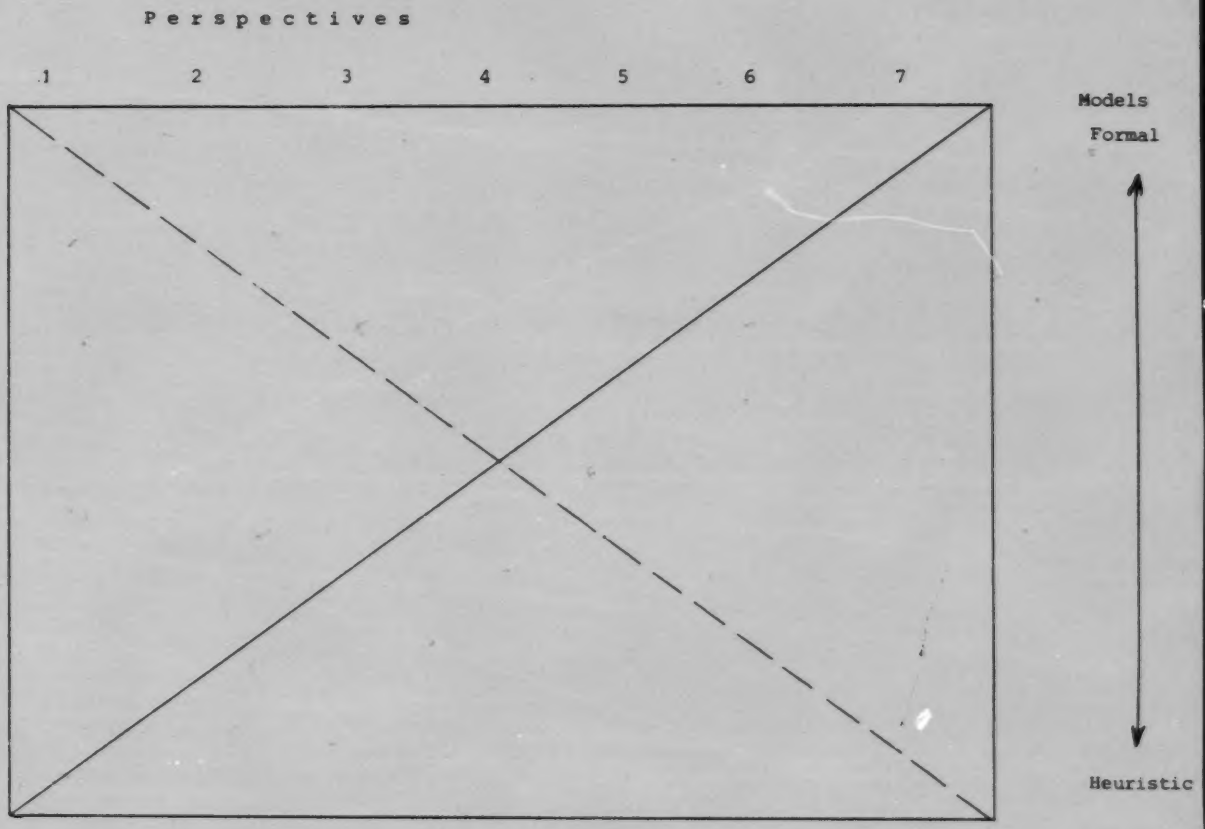


Figure 2: The degree of formality of the modelling perspectives.

ing to represent natural thought processes in an individual and in groups. FEUERZEIG and his colleagues have proposed such ideas in describing human problem solving (1971). Also WITZ and HART (no date), in the A-1 project, have given a simulation of infant sensory-motor behavior in which each sensory-motor scheme, in Piaget's sense, is represented by a little program running on its own continuously, but communicating directly with other programs representing other schemes. The result is a much more dynamic simulation than could possibly be obtained by sequential processing, except in the trivial sense that a single, sequential program is written to operate the parallel processors. The use of parallel processing to represent social interactions may not have been tried - though it surely won't wait long - but even so, at a heuristic level, we can begin to draw up flow charts of pupils and teachers who interact by sharing a common storage and thus are able to interrupt each other, e.g., by putting a negative answer into the decision, is the other paying attention to what I'm saying, or does the other understand the question.

If, however, all the decisions in the program representing a single pupil, or his teacher, are strung out sequentially, the interaction must be made complex. However, if many of the decisions of individuals are represented as parallel processes, considerable simplification in the whole flow chart may result.

REFERENCES

Bruner J.S. Goodnow J. Austin G.A. : A study of thinking. New York: John Wiley, 1956

Coleman J.S. : Racial segregation in the schools: New research with new policy implications. Phi Delta Kappan, 57(2): 75-78 (October, 1975)

Cronbach L.J. : The two disciplines of scientific psychology. American Psychologist, 12:671-684, 1957

Cronbach L.J. : Beyond the two disciplines of scientific Psychology. American Psychologist, 30:116-127, 1975

Cronbach L.J. : Judging how well a test measures; new concepts, new analysis. In L.J.Cronbach and P.J.D.Drenth (eds.) Mental tests and cultural adaptation. The Hague, Netherlands: Mouton Publishers, 1972

Easley J.A.,Jr. : Comments on the INRC group. Journal of Research in Science Teaching, 2:333-235, 1964

Easley J.A.,Jr. : Seven modelling perspectives on teaching and learning - some interrelations and cognitive effects. To appear in Instructional Science, 1976

Ennis R.H. : Children's ability to handle Piaget's propositional logic: a conceptual critique. Review of Educational Research, 45:1-42, 1975

Erlwanger S.H. : Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. The Journal of Children's Mathematical Behavior, 1(2):7-26. Curriculum Laboratory, University of Illinois, Urbana, Ill. 61801, 1973

Erlwanger S.H. : Conceptions of elementary mathematics among children studying by individually prescribed instruction. Unpublished doctoral dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1974

Feuerzeig W. u.a. : Programming-languages as a conceptual framework for teaching mathematics. Bolt, Beranek and Newman, Inc., Cambridge, Mass. (Final Report on Contract NSF-C 615, National Science Foundation, Washington, 1971) (four volumes)

Kamara A.I.
Easley J.A., Jr. : Is the rate of cognitive development uniform across cultures? - A methodological critique with new evidence from Themne children. To appear in Pierre R. Dasen (ed.) Cross-Cultural Piagetian Psychology. New York: Gardner Press, 1976

Kohlberg L. : Stages of moral development as a basis for moral education. New York: Beck, Crittenden and Sullivan, 1971

Lunzer E.A. : Formal reasoning: A reappraisal. In B.F.Presseisen and D.Goldstein (eds.) Topics in cognitive psychology: Language and the development of thought. New York: Plenum, 1976

Piaget J.
Szeminska A. : The child's conception of number. New York: Norton, 1965 (French, 1941)

Piaget J.
Inhelder B. : The child's construction of quantities: Conservation and atomism. London: Ronbledge and Kegan, 1974 (French, 1962)

Slotnick D.L. : The fastest computer. Scientific American, 225 (February, 1971)

Stake R.E. (ed.) : To evaluate an arts program responsively. Evaluating the arts in education: A responsive approach. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Publishing Co., 1975

Witz K.G. : Representation of cognitive processes and cognitive structure in children I. Archives de Psychologie, 40(160): 61-95, 1970

Witz K.G./Hart R.S. : A-1 Project: Models of the organization of behavior-in-time in an infant. Manuscript in progress, Committee on Culture and Cognition, 1005 W. Nevada, Urbana, Ill. 61801, USA (no date)

THOUGHTS ON INDIVIDUALIZED INSTRUCTION IN MATHEMATICS

J.A. Easley, Jr.

Recent developments in cognitive psychology make mathematics education an exciting field to think about, but a difficult one in which to reach a definitive position. These developments include recent revisions of the theory of logico-mathematical operations by PIAGET (1971, 1974) and studies at the University of Illinois (Urbana-Champaign), Cornell University, and other U.S. centers of the conceptualizations children actually have of arithmetic and the processes of giving an explanation. Persistent interest among mathematicians in conceptions of mathematics (Polya, Lakatos, and Wittenburg, for example) and increased awareness of the disasterous effects of mathophobia (Lazarus, 1974), make re-examination of the traditional sequential organization of the mathematics curriculum mandatory.

In order to provoke discussion, therefore, we take the most exciting, open-conception position on the nature of mathematics and its possible psychological organization in the curriculum that we can, and we try to consider what would be demanded of teachers and teacher educators in order to make substantial progress in this direction toward a new, cognitively-based mathematics curriculum. We can anticipate that this demand will be an increased ability to perceive opportunities for teaching which will depend in turn on developing teachers' conceptions of mathematics and the teaching of mathematics from where they are now -- as a necessary starting point for any conceptual change -- to some points closer to those exciting conceptions mentioned above.

The consideration of perception-cognition as the basic process of individualized mathematics instruction will

make new demands on our research methodology. For example, CRONBACH's recent objections (1975) to correlational and experimental methods as means of theory development and the failure of the necessary and sufficient condition type of operational definition in identifying cognitive systems (Easley, 1974) lead us to opt for a research approach that is much more naturalistic than our traditional, mechanical means of data collection and data processing. The advent of the videotape recorder, and the well-known effect that viewing a movie or TV scene repeatedly enables observers to see more and more interesting detail each time, offers the possibility that, used in this way, videotape can serve the sort of research function that the microscope served in biology and other descriptive sciences. Once we have abandoned the traditional conceptions of mathematics, we can learn to see mathematical ideas in greater detail, and we can try to grasp the cognitive systems underlying mathematical behavior in children and teachers.

1. RECENT DEVELOPMENTS IN COGNITIVE STUDIES OF MATHEMATICAL THINKING

In a long essay by PIAGET (1974) summarizing the findings of his 100 recent studies of causal explanations in children (35 of which have been published in volumes 27 - 30 of the Etudes d'Epistémologie Génétiques), Piaget states that the chief cause of the delay in the full realization of logico-mathematical operations (which first appear at about the age of 5 years but which are not fully generalizable, even in a clinical interview,[1] until the age of 12-14 years) is the interaction of such operations with

1) The studies by Karplus and others reporting adults who do not use the more powerful, "formal" operations in solving set problems do not mean the subjects' development is retarded, but only that their capacity was not being tapped by giving them particular problems to solve. A clinical interview demands a skillful use of probes to discover cognitive capacities.

kinesthetic and other perceptual (and other "infra-logical") systems. The diagram in volume 27 of the Etudes gives a preliminary idea of the interaction Piaget sees operating between these two parallel lines of development. The strange phenomenon that many children of about 7 or 8 years report that the amount of clay in a ball of plasticine is conserved when its shape is transformed but its weight and volume are not, is explained in terms of the deep-seated integration of weight and volume with kinesthetic, action systems which are strong enough to override the logical operations which the child already has. These operations do not encounter such strong interference, however, in the case of amount of substance (whatever that turns out to be) and number of counters, and so conservation comes first to these cases.

Witz and I put forth a somewhat similar position in 1971 (the same year in which Piaget's original essay in French appeared).[1] We advocated continuous kinesthetic structures, called deep structure fields (d.s.f.) to explain causal explanations and physical quantities in children's thought. We noted further support for this position in ANDERSON's study (1965) in which he attempted to teach first grade children an aspect of formal (logico-mathematical) operations -- the all-but-one strategy -- and succeeded in many cases where there was no evident kinesthetic involvement (e.g., deciphering dress codes of cowboys who were "friends of the sheriff"). Anderson's subjects, however, could not transfer this strategy to the pendulum problem, which tends to have a strong kinesthetic involvement, e.g., when it is assimilated to a cognitive system such as is involved in a child swinging in a swing.

---

1) Although we were not aware of having encountered this hypothesis before, we cannot claim complete independence in advancing it because I had spent 5 months in 1968 participating in and even reading advanced copy on many of the 100 studies on causal explanation on which Piaget's conclusion is based, and by which my own thoughts were undoubtedly stimulated.

What this new theoretical position of Piaget leaves unanswered, however, is the interaction mechanism between kinesthetic and logico-mathematical systems of thought. The 35 published studies and the summary review of the 100 studies do provide additional richness of detail (although analysis of complete interview protocols would be useful) not yet formulated into explicit, developmental theory. In parallel with the two lines of development just discussed, Piaget and his associates describe another developmental process, the progressive differentiation of physical quantities. In earlier studies, some physical quantities (such as "speed", for example) appear first as global concepts and are progressively differentiated into more precise relational systems (involving, for example, distance and time as later refinements). (Thus, this differentiation moves in reverse order from the mathematical definition of speed as a function of distance and time.) In these new studies, Piaget points to other such global quantities (e.g., "weight" and "power") which are progressively differentiated into more precise systems of physical quantities involving force, impetus, work, acceleration, as well as more precise versions of weight and power. However, no precise map of the branching, evolving tree of these concepts has yet been detailed. Further analysis of the 100 studies, e.g., detailed protocol analysis (Easley, 1974), and further experimentation involving variations on their procedures, however, could lead to this result. Then, perhaps, the intimate relation of this progressive differentiation of global into more numerous and precise physical quantities to the developing logico-mathematical and infra-logical (kinesthetic) systems may be discernable. Perhaps, there is even a more direct way of studying the interaction of these parallel developments, now that we understand the question.

The implication of such a richer theory for the mathematics curriculum, however, will be profound. Not only will

certain cases of the well-known difficulties of mathematical applications (e.g., story or "word" problems) begin to be understood, but a detailed map of the developmental process of systems of physical quantities will, I believe, reveal many possibilities for quantitative theory construction with a rich system of physical quantities (like physics) at much earlier ages than had previously been assumed. For example, children upwards of age 9 gave explanations of the descent of a ball along an incline, or suspended as a pendulum (and graphed their ideas of what was happening quantitatively), that are much more complex in terms of the temporal and spatial variations of numerous physical quantities than any curriculum project or textbook I know has offered at either elementary or secondary levels. Likewise, their mathematical conceptions of relationships between quantities transcend the mathematics curriculum of the school completely. It is evidently not that such conceptions are more advanced than the operations of arithmetic, algebra, and geometry, but rather that they occur in a parallel development which the curriculum ignores.

In his address to the Jean Piaget Society in Philadelphia on June 14, 1975, Piaget discussed another remarkable advance in his theory. He reported that he had changed his mind concerning the sufficiency of transformations as a theoretical basis for explaining intelligence. Although, his former belief that all logico-mathematical operations were based on the natural development of systems of transformations (evolving from external to internalized transformations) seems to have served him well in generating numerous fascinating experiments which often surprised the psychological and educational world, and although he had sharply criticized the empiristic, associationistic concepts of Anglo-American psychologists and educators based on relations between elements (S-R, S-S, R-R, etc.), he now has found his own reasons for recognizing correspondences between various elements on an equal status with

transformations.

The importance of transformations had originally been made evident to him, Piaget said, by the work of the mathematician Felix Klein (the Erlangen program) and by the central importance attached to groups and other such structures by the Bourbaki school of mathematicians. However, he had noted that recently mathematicians had attached more and more importance to morphisms and categories (systems of morphisms)(MacLane & Birkhoff, 1967), resting fundamentally on correspondences. He was led to rethink his position and to redo some experiments giving attention to the possible role of correspondences in children's thought. He concluded that, while there were some simple situations in which only correspondences were involved and some in which only transformations were involved, in most interesting situations there was a necessary relation between the two. In a few exceptional cases, a system of correspondences is extensionally identical with a system of transformations. For example, the morphism, "successor of", which maps the natural numbers into themselves, is extensionally identical with the operation "adding one".[1)] However, in most cases of interest to Piaget the relation is not so simple. He gave a number of examples, one of which will have to suffice here.

Not withstanding the numerous efforts of Anglo-American psychologists to accelerate conservation (which he has called "the American question" and which have been inconclusive on the whole, whether done by psychologists skeptical of Piaget's theory (see Hooper's review, 1972, 1973) or the more sympathetic studies of Smedslund and of Inhelder, Sinclair, and Bovet (1974)), Piaget set out to accelerate conservation of the quantity of clay in

---

1) Technically, this is true for the integers, but would require some restatement for the natural numbers since the first natural number is not a successor.

balls undergoing transformations of shape, by teaching the child the correspondence of discrete parts before and after a transformation of the ball's shape. He began by removing a piece of one of the balls and asking the child if what was left of the ball still had as much clay as the other one. When the child said "no", as most did from relatively early ages, he replaced the piece he had removed, but on the other side of the ball, and asked:"Now, do the two pieces have the same amount of clay in them?" The subjects were quite generally inclined to say, "yes". He continued in this way, removing pieces of clay and adding them on again until the original shape of the clay was greatly transformed, every time asking the same questions and generally getting the same answers. Then he attempted the original experiment in which the ball of clay was rolled out into a sausage. He found that the children he had trained on the correspondence of pieces became conservers in the original rolling out transformation about 2 years earlier than had been found previously (see Inhelder, Blanchet, Sinclair and Piaget, 1975).

In retrospect, I may have exaggerated the novelty of this development in Piaget's theory, for it did hit me as a dramatic shift in the general direction of more conventional learning theory. Now that I think about it, I can find many precursors for morphisms and other forms of correspondence in Piaget's thought, which he has now integrated into this new theory and which had seemed previously a bit anachronistic, viewed in relation to a theory written exclusively in terms of systems of transformations. Explicitly within the realm of morphisms is the work on the psychology of function (Piaget et al., 1968), and the studies on identity (Piaget, Sinclair, and Bang, 1968), also take on more meaning for me seen as correspondences than they did when seen as examples of the identity transformation. I recall, also, that the original report on the experiments involving deformations

of clay balls (Piaget and Inhelder, 1941) contained a study of the development of atomism, which seems now to provide a model for conceiving of the correspondence of the substance before and after its transformation of shape. All these and other matters (such as Piaget's concern for regulations in the pre-operational period) now invite new study in the light of his enriched theory of the development of human intelligence.

There have been a number of interesting studies of children's conceptions of arithmetic and related studies of cognitive processes, inspired more by Piaget's early work than by his studies of logico-mathematical operations. Several recent studies have shown that children typically do not employ the cognitive categories of the four operations and the systematic algorithms in which arithmetic is conceived theoretically, but instead appear to use more elementary transformations (parts of algorithms) flexibly and often creatively, but in the best students these function in an integrated though still very flexible fashion. What is required for this purpose is that interviewers, sensitized to any difference in cultural groups that might be involved, conduct clinical interviews to reveal the subject's competence in a central cognitive task.

We have identified several such tasks based on our work in the arithmetic area. They are as follows:

1. Arrange fractions in order of magnitude. (The task can be adjusted to the comprehension of different age levels without affecting the basic competence underlying it. With decimal fractions, it is amazing how small a percentage of high school seniors can do this correctly.)

2. Manage place value and extra zeros in multiplication problems, e.g.,

Will these give the same or different answers?

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 170 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 170 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ 170 \\ \hline \end{array}$$

What do you do with the zeros?

$$\begin{array}{r} 046 \\ \times\ 071 \\ \hline \end{array}$$

Where does the decimal point go?

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times\ 5.6\ 0 \\ \hline 1\ 3\ 8\ 0 \\ 1\ 1\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 8\ 8\ 0 \end{array}$$

many put it here

3. Translate both ways between number problems and story problems (situations), e.g., create a situation for which $\frac{1}{4} \times 12$ is appropriate.

4. Explain the relations between "of", "times", "goes into", "divided by", and "multiplied by".

Most teachers, as well as most of the subjects of our interviews, protest that they were not taught how to perform such tasks. And yet there are many who have learned them, by implication one might say, from what they have been taught. These are "transfer" tasks that have high validity in terms of the usefulness of mathematical learning outside the learning task.

What is important to discover, as interviewers go about the business of assessing pupils' understanding of arithmetic developed and their strategies for interpreting the printed page, is the attitude of their teachers toward the remedial process. It is often the case, it seems to us, that teachers see other values and objectives than

the cognitive competencies we are mainly discussing -- for example,getting to like arithmetic. Some teachers may well be willing to sacrifice what they might regard as a higher level of competence for a lower level goal of having children feel able to cope. In the spirit of responsive evaluation (Stake, 1973) we want to pick up these priorities from teachers and attempt to assess their attainment through interviews with children. Another way to do that is to show teachers some of the tapes of their students and ask them to comment on what they reveal and what they don't reveal. Naturally, not all the children can be interviewed on all the objectives that teachers bring up in response to the tapes played to them. There seems to be no way, no matter how much planning and discussion is had in advance, to anticipate all the tacit objectives of teachers which may come to the fore when they see the work of a particular child in an unfavorable light.

An example will help. A fifth grade boy argued in an interview that 1.60 = 1.06 for gallons or liters, but not for money. He drew pictures, reduced 60/100 to 6/10 and explained how decimals were different from cents. In the interview, he showed a great deal of self-confidence and brought in many things he had learned correctly in the defense of this incorrect conclusion. We could agree with his teacher that he was a thoughtful student who cleverly figured most things out for himself. Indeed, a week later, he had figured out what was wrong with his argument. So we could say many good things about his experience in arithmetic despite the fact that decimals had not been adequately taught. But some of the good qualities of his thinking didn't come out until we saw the tape and got over our shock at his mistaken idea. For further examples of teachers' reactions to pupils' ideas, see WALKER and ADLEMAN (1975) and reports of the "Ford Teaching Project", Centre for Applied Research in Education , East Anglia University, Norwich.

2. THE NATURE OF MATHEMATICS AND THE SCHOOL CURRICULUM

Mathematics is typically conceived by teachers as a fixed body of propositions or procedures in which students have to acquire belief and skill (Shirk, 1973). The notion that mathematics at the elementary school level could be a constructive or even a creative discipline is difficult, if not downright impossible, for most American teachers and educators to accept. If we look at recent developments in areas of mathematics not so technical as to be beyond reach we find, for example, Martin Gardner's April Fool review in "Mathematical Games" (1975) citing six important discoveries of 1974 which had largely "escaped scientific notice". This list alludes to the famous four-color map theorem. They are presented in a "deadpan" fashion, serious sounding enough anyway to give some experienced mathematicians and physicists pause. (See his July column.) I worked out the flaw in the relativity example but not before I wondered if a major revision in physics was going to be needed. Similarly, in the case of Gardner's alleged counter example to the four-color theorem, before attempting to color it, I wondered if there was something monstrous, in the sense of LAKATOS (1963), about this particular map. Since I couldn't find a reason to rule it out of court as a monster, I wondered if a genuinely monstrous counter example was something I could invent. But what can you do to a plane except roll it up, stretch it out, and punch holes in it? None of those seemed to help. In attempting to construct a real monster, I thought for a while that I had constructed a ten-region map that required five colors until my 13-year-old son pointed out that, by exchanging the colors I had assigned to three regions, he could color it satisfactorily with four colors. I'm now encouraging him to color the 125 region map in Gardner's column.

If Lakatos' heuristics of mathematics are correct -- and many of my mathematician friends react to them with bore-

dom, saying that most mathematicians are well aware of this sort of thing -- then mathematics is neither fixed body of knowledge, nor a progressive accumulation of theorems as the curriculum writers seem to believe. However, how could the conception of a flexible and creative discipline apply to the fields of elementary arithmetic, algebra, and geometry from which the school curriculum is drawn? WAISMANN (1951) argues that it does. First of all, he points out that no one has found axioms for a theory of arithmetic which won't work equally well for an infinite variety of other systems. Second, he points out that there are often plausible reasons for constructing number systems which are noticeably different from the so-called natural numbers. For example, he cites the system 0,2,3,4,..., which names the numbers of divisions into which a whole may be divided. This surely would appeal to many children who have trouble understanding the rationale of fractions like 3/1, 4/3, and 1/1. A whole undivided has no divisions, and to refer to it as having one division is a contradiction from a common sense point of view. If a whole has only three divisions, on the other hand, how can you have four of them? Waismann also proposes:"It would be interesting to invent an arithmetic and a possible application of it which lacked the number 5, without the omission of this number being perceived as a defect (1951, pp. 120-121)".

These are not merely wierd recreations of bored mathematicians. They represent a basic human tendency as shown by the fact that all of 75 children whose arithmetic processes and conceptions have been studied by our group at the University of Illinois have shown that they create their own conceptions of what they are doing, and even the most competent in calculation do not follow the rigid rules and algorithms they were taught in school. These interesting alternatives to standard arithmetic also represent an educational opportunity to escape what LAZARUS (1974) calls mathophobia. He likens the standard

mathematics curriculum to a music curriculum in which no one is allowed even to listen to interesting music until they have completed many years of finger exercises, scales, and music theory.

Mathematicians often regard their field as one that is as creative as that of painting and sculpture, and far more creative than the critical disciplines like philosophy and literature. Yet school people generally seem to regard "creative mathematics" as a contradiction in terms. The creative way that most children do mathematics could offer a real entree into the creative aspects of the discipline and yet, for most children, this natural, unself-conscious creativity leads them into a trap, which Benny in ERLWANGER's (1973) study refers to as a "wild goose chase", in which each new set of problems seems to require new and extremely arbitrary rules to be discovered and to be associated with the equally arbitrary format in which the problems are to be written.

What this would demand of teachers, if school mathematics is to break out of its lock-step, linear sequence of rules and procedures and enter the world of creative, abstract conceptualization, is a complete "about face". Teachers who themselves have performed well in school mathematics, and even many who have enjoyed university mathematics, will often be the least able to make the shift. The quest for the right way to do things is too strong. On the other hand, those who have felt that mathematics is too arbitrary and obscure for them to understand may include some teachers who are willing and able to participate in the transition to a type of school mathematics in which children are encouraged to do what makes sense to them, to write in a way that makes sense, and to compare their work and format with that of other pupils only in order to stimulate new ideas.

The interest of mathematics and its value as a subject

for general education lies in large measure in the enormous range of situations from which abstractions can be drawn. This would support Morris Kline's suggestion that, "We should start with simple and concrete situations and with heuristic arguments and only gradually arrive at a deductive organization". Alexander Wittenberg also argued that, in contrast to the practice of first developing a body of mathematical ideas and only then introducing various applications, "the applications rather should arise naturally, simply because elementary mathematical ideas have a practical import and a practical meaning, and this the student should be made to grasp". What I suggest is not to seek teachers who are highly proficient in established bodies of mathematical theory and procedures, but rather to seek out people who are highly interested in the world around them and inquisitive about the order in that world. Amateur scientists, one might call them, meaning those who practice a scientific attitude broadly as a matter of personal enjoyment rather than the highly focused and rigidly trained discipline of the typical professional scientist. Such teachers could more easily learn to respond with encouragement and enthusiasm to children's ideas about the world than those who have studiously learned mathematics and so, faced with children's creative ideas, naturally respond with correction and straight-laced instruction in proper methods.

School instruction in creative mathematics would necessarily be highly individualized since it would tolerate all manner of individual idiosyncrasies in conception, not merely a difference in rate of progress or a difference in difficulty of a particular topic. On the other hand, the spirit of tolerance should often extend to the point of helping all pupils enjoy listening to each other's ideas, so group discussions would not be eliminated. Many highly recommended instructional techniques, such as providing pupils with immediate feedback, can

prevent teachers from finding out what children are thinking and from responding to what they are really doing (Smith, 1974).

The big problem with such an ideal curriculum would be the matter of organization and control. How would pupils fare who were already shy of mathematics when they came into such a class? The only organized field of study in terms of which one could now attempt to provide the structure needed for such a curriculum is the newly expanded theory of cognitive development by Piaget, although it is narrower in its scope than a school curriculum in "naturally arising mathematics" should be. It can, however, be expanded by several research approaches. These include:

1. Look for opportunities for the opposite structural property to shine, e.g., when Piaget emphasizes the power that transitivity gives a child in a given situation, look for situations in which non-transitivity is a better model (see Gardner, 1974) and in which the child unable to grasp the transitive relation has an advantage. When conservation gives a child an advantage over nonconserving children, look for situations in which nonconserving children have an advantage.

2. Look for the trivial or lower-level misapplication of a powerful structure that is supposed to have a higher-level function. For example, reversibility of order is powerful in situations of physical rotation, but it may generate right answers to arithmetic problems for the wrong reason as well as wrong answers. $3 \times 5 = 5 \times 3$, but contrary to many students' belief $12/3 \neq 3/12$.

3. Try to build models of infra-logical thought to lift it from the state of being ignored to the level of importance which creative scientists and

mathematicians claim intuition has in their work. For certain, one should try to make the development of intuition an important part of the curriculum.

4. Construct a growing map of cognitive systems relevant to mathematics and the related disciplines. This is needed to provide the technical language as well as the basic structure needed for curriculum planning.

3. RESEARCH METHODOLOGY FOR CLASSROOM RESEARCH AND EVALUATION

General systems theory gives us one basis for the control of complex phenomena. But the basic requirement of any use of systems theory is to have an adequate model of the system to be controlled in its normal mode of functioning. Learning theorists in education have, instead, been attempting to design functional systems which teachers could be taught how to operate. Unfortunately, these designs of instructional systems have never taken into account the conceptual systems of the teachers and the students. Putting it in terms of Skinnerian theory, the full set of operants were never observed and therefore were not taken into account in the programming. A better approach would be to observe functioning classroom systems which one accepts as typical of those one wants to change. One then needs to construct a detailed model of the teacher-pupil interaction mechanisms (and I would presume that cognitive systems in both teachers and pupils will be needed to describe these mechanisms efficiently). Then one looks for opportunities for helping both teachers and pupils to change the system in a desirable direction. This would be the method of the ecologist who wishes to improve forest or ocean yields, or to reduce the population of a pest. Even the engineer who designs a new device or

complex of devices draws on models of existing systems whose functioning in practical situations is well represented. Rarely does any engineer take something directly from the experimental laboratory and use it as a practical device that interacts with people. Human engineering studies need to be carried out first, or at least human interactions with existing systems need to be taken into account.

This calls for a radical change in educational research procedures. Analysts must work over videotapes of pupil and teacher behavior to discover the mechanisms of interaction. Sending observers into the classroom with predetermined categories or checklists is most unlikely to reveal these mechanisms at work. Also, the population to be sampled can not be determined in advance. The population over which appropriate strategies for change will work best is one of the research problems to be solved as study of mechanisms of teaching and learning progresses. One of the biggest obstacles to the kind of research needed is the general absence of understanding of the proper function of sampling and a priori categories in the total research enterprise. They are too much matters of custom like the choice of values of alpha and beta in research design (Hays, 1963). Even though traditional research designs in education were severely challenged by Skinnerians and other workers in programmed instruction in the early 1960s, no agreement on a new paradigm has emerged, and Cronbach's two disciplines of scientific psychology are still the norm in evaluating research proposals in graduate schools and in funding agencies. While some curriculum evaluators like Stake and Glass tend to urge abandoning the quest for generalizability and for theory development in studying educational practice, urging instead descriptive and responsive study of particular situations to learn how they function, I would argue that the quest for theory and generalizability

through theoretical understanding has supreme value for the practical educator. The difficulty is with the methods by which most people try to do that. See CRONBACH (1975) for an analysis of one of the major reasons experiments and correlational studies fail to help produce theory, the original results won't hold up long enough under the growing awareness of new variables that should have been controlled. Another important factor may be the effort to construct the wrong type of theory, viz., hypotheses written on the model of algebraic functions that engineers derive from basic physical laws expressed in structural or in field conceptual terms, which could provide a better model. The notion that some external conditions can be found in which objects behave in predictable ways is evidently not the way in which most theory in physics, chemistry, and biology took form. Rather, the quest for internal structures and mechanisms of interaction have been the prime motives and the prime targets of creative enterprise in these advanced sciences (Harré, 1972). It is time we took up that approach in psychology and especially in education where our need for theory extends far beyond narrow experimental situations. I have come to conceive the study of teaching effectiveness in the following way.

Teachers and pupils alike perceive each other, all manipulable objects, and printed instructional materials according to how they fit into their currently active conceptual frameworks. A person's conceptual systems (which need not be integrated with each other because they can't all function at once) have a dynamic, driving quality and should not be thought of merely as stored reference information. Unless some external demand focused on particular object exceeds in psychological force the internal force of a framework which has no place for that object, it is totally ignored or simply not seen. As Professor Nichols has shown in arithmetic, children often don't notice the signs indicating the operations to be

performed, e.g., they interpret 2 = 1 + ☐ as an indication to add 2 and 1 and write '3'. Their framework of the moment tells them what to do with numbers, not what to do with signs for operations. Training children to function mechanically, e.g., reading the marks on the paper aloud individually, of course, would be only treating the symptom, not the cause. Such training is itself not acquired as a universal habit, but is incorporated into a limited framework which may usually be activated by the schoolroom setting and not otherwise. The effectiveness of teaching programs has to be assessed in terms of the way they interact with such cognitive systems in teachers and children -- not symptomatically.

To see how, from our perspective, we would approach the task of comparing the effectiveness of individualized instructional programs with standardized instructional programs, it will help to make the following contrasts with traditional research designs and consider the reasons given for each:

1. We would propose to select children for study, three or four per classroom, who are given the most distinctive characterizations by their teacher rather than sampling children from each class by randomization, stratified on general parameters. Since, the purpose is to study the effects of teacher-pupil interactions on thinking and mastery of skills, we must select those children for study most likely to reveal the nature of these interactions. For each child studied, we must, consequently, obtain a rich body of data relevant to the interaction mechanisms. Teachers are likely, we find, to have very distinctive impressions of a small proportion of their pupils and to spend most of their energies planning, and in other ways anticipating responses typical of these children. Those others who

fade into the background, of course,need to be studied for a complete picture of the class, and one of them should be included in each sample, but they typically contribute less to the study of the classroom interaction mechanisms. It is assumed that the primary purpose of the study is to know how the learning that occurs does so in order that teachers and teachers of teachers may be better trained to help learning develop into more fruitful directions. We have little reason to search out mechanical rules, procedures, or maxims as such, for experience teaches us that these are interpreted differently by different teachers.

2. Data analysis for each child would result in a qualitative and structural representation rather than in a number or profile. We want to know what a child knows or how he operates, not to place him on a scale in relation to a population. The "what" and the "how" result from his development and experience in school far more directly than the "how much" -- there are too many qualitatively different ways of making the same score. And the "what" and the "how" of his knowledge determines his future learning far more than the "how much". Mathematical (and quantitative) models of cognitive systems take longer and require more resources than the teacher training goal probably justifies.

3. Comparison between classes and programs would be in terms of the qualitative differences in the mechanisms which go on between teaching operations and learning activities, and their reflection in pupil competence. There is no good way, anyhow, of determining how much of the average gain in score is due to some particular feature of instruction. As CRONBACH (1975) points out, interaction effects are endless, and all obtained experimental results have a way of washing out as more of the

situation is understood. Instead, if we study a child's strategies for coping with a school task, and observe the child interacting with his teacher, and study the teacher's view of the child's strengths and weaknesses, we can determine a kind of mechanism that will explain in detail what is learned and how it is perceived by the child and by the teacher. The complex fitting of such mechanisms into thousands of items of protocol data constitute a better basis for improving our understanding of curriculum programs than does the fitting of regression lines to quantitative arrays of data points. (See Elliott and Partington, 1975)

4. Comparisons between observations of the same teacher-pupil system at different times would be made in terms of qualitative changes in the strategy of each, and of the perception by each of the other, as well as, of the subject-matter task. Looking at profiles of teacher-pupil behaviors made from standard checklists won't help, and we try to avoid the application of standard phenomena. However, by videotype and audiotape recording and repeated playback of tapes to reveal more and more detail, we expect to be able to see the mechanisms of teaching and learning at work, mechanisms which are normally hidden by the limited amount of data a one-time observer can take in. These mechanisms involve the operation of conceptual frameworks, dynamic cognitive structures, long-term memory, and other systems. Our research indicates that categories usually employed in talking about mathematics, such as operations, numbers, figures, numerals, algorithms, etc., are not descriptive of what pupils learn and what they do in school mathematics.

5. Programs would be described and compared in terms of the operating characteristics of teaching-learning

mechanisms rather than in terms of profiles or quantitative tables. The "operating characteristics" of an airplane, a crow, a bee, and a pterodactyl are most fundamentally understood in terms of the different mechanisms employed, for example, flight mechanisms. The quantitative differences between these structures, which potentially are almost endless, are of general value only after mechanisms are understood and only in relation to these qualitative differences.

6. The degree of implementation of a program would be interpreted to mean the general degree to which participants in a program are utilizing the mechanisms of teaching and learning that it makes possible, rather than in terms either of its effectiveness, or of any quantitative ratios. This is a matter of judgment of skill, grace, naturalness, and the fit of the actual teaching and learning mechanisms in relation to the organization and plan of the program. External factors (settings) that interfere with a fitting execution of a program will be noted - both the obvious ones (like the effects of a slippery football field on the performance of the players) and the subtle ones, where they can be found, like worrying about failure to meet irrelevant unrealistic expectations.

This general approach to educational research has been under intensive development for about 8 years with some of my colleagues and many of my graduate students. Its relevance to conventional approaches to individualized instruction is indicated in EASLEY and WITZ (1972). The general approach has not as yet been applied to a project of any size, but only in more limited types of situations: one or two classes (Driver, 1973, Rose, 1974), student teachers (Hanson, 197o; Ashenfelter, 197o; Kendzior 1971), a small group of children in a science corner (Knamiller,

1971), observations of individuals and interview situations (Golshan, 1972; Knifong, 1971; Erlwanger, 1973, 1974; Goodwin, 1974; Leiser, 1974; Albert, 1973, 1974a; Witz and Albert, 1975). A general model of instructional evaluation based on this approach has been formulated (Witz, Goodwin, and Easley, 1974). A preliminary catalog of types of cognitive structures and systems has been developed (Witz and Easley, 1972, 1976). Preliminary teaching applications are developed by EASLEY and ZWOYER (1975).

Consideration of reporting on such studies brings us to another important difference we have from standard research methodology. As usual, there is a need for reporting at different levels of specificity for different audiences. Far more important, however, is the need for those who wish to reap the maximum benefits of research to study the phenomena in detail sufficient to build their own intuitive basis for perceiving teaching-learning mechanisms -- at least those which bear some family resemblance to ones reported in the report. This is likely to require that carefully edited videotapes accompany all reports. Frequent reviewing of such tapes, going over certain pieces again and again, is the only way in which generalizability of study is possible. But extensive, carefully analyzed experience with phenomena is the only way in which applications can be made of any principle or formula, except in the most stereotyped cases which are, in effect, "set up" already for purely mechanical application. (The generalizability of an experimental result, in statistical theory, is based only on an estimate of the probability that exact replications of the original experiment will give the same result.) Otherwise, effective use of scientific principles always depends on an intuitive conception of systems and mechanisms involved in order to know how to make the connections with the principles and formulas. Operational definitions, so-called, give us a procedure for determining, e.g., the

temperature of something, but they are logically impotent to connect from situation to the theoretical terms of the formula -- let alone to tell us which formula to apply. Only a developed intuition can deliver useful generalizability of any knowledge, and this requires carefully guided experience.

At the University of Illinois, a laboratory for cognitive analysis of video- and audiotapes is being established at 1005 West Nevada in Urbana. This laboratory will have permanent equipment adequate for pilot studies as well as for training teachers and researchers. This laboratory is part of a facility developing at that address for interdisciplinary studies of educational problems which focus on the contributions of the learner, under the general supervision of the Committee on Culture and Cognition, J.A. Easley, Jr., Chairman.

REFERENCES

Albert E. : Young children's conceptions of heat and temperature. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1973

Albert E. : Cognitive systems in arithmetic. Unpublished paper, Curriculum Laboratory, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1974a

Albert E. : Stability and instability in a subtraction algorithm. Unpublished paper, Curriculum Laboratory, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1974b

Anderson R.C. : Can first graders learn an advanced problem-solving skill? Journal of Educational Psychology 56:283-294, 1965

Ashenfelter J.W. : Problems of beginning science teachers in helping students draw conclusions from data. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1970

Cronbach L.J. : Beyond the two disciplines of scientific psychology. American Psychologist 30:116-127, 1975

Davis R.B. : Observing children's mathematical behavior as a foundation for curriculum planning. The Journal of Children's Mathematical Behavior 1(1):7-59, 1972

Driver R.P. : The representation of conceptual frameworks in young adolescent science students. Ph.D.dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1973

Easley J.A., Jr. : The structural paradigm in protocol analysis. Journal of Research in Science Teaching 11:281-29o, 1974

Easley J.A., Jr. : Seven modeling perspectives on teaching and learning. To appear in Instructional Science, 1976

Easley J.A., Jr.
Witz K.G. : Individualized instruction -- Some observations from the ivory tower. Educational Technology 12 (March): 50-52, 1972

Easley J.A., Jr.
Zwoyer R.E. : Teaching by listening -- New hope for the mathematics classroom. Contemporary Education, 1975

Elliot T. Partington D. : Three points of view in the classroom. Centre for Applied Research in Education, East Anglia University, Norwich, 1975

Erlwanger S.H. : Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. Journal of Children's Mathematical Behavior 1(2): 7-26, University of Illinois Curriculum Laboratory, 1973

Erlwanger S.H. : Conceptions of elementary mathematics among children studying by individually prescribed instruction. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1974

Gardner M. : Mathematical games -- On the paradoxical situations that arise from non-transitive relations. Scientific American 231 (October): 120-125, 1974

Gardner M. : Mathematical games -- Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention. Scientific American 232 (April): 126-133, 1975

Ginsburg H. : The myth of the deprived child. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., Ch. 6, 1972

Golshan M. : A detailed analysis of a child's conception of physical phenomena. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1972

Goodwin D. : Visual-spatial organization in a seven-year-old child. Master's thesis, College of Education, University of Illinois, Urbana-Champaing campus, 1974

Hanson R.K. : A comparison of the alternate theories formed by students in the classroom and those held by student teachers. Ph.D.dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1970

Harré R. : The philosophies of science. Oxford: Oxford University Press, 1972

Hays W.L. : Statistics for psychologists. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1963

Hooper F.H. : An evaluation of logical operations instruction in the preschool. In: R.K. Parker (ed.) The preschool in action: Exploring early childhood programs. Boston: Allyn & Bacon, pp. 134-186, 1972

Hooper F.H. : Cognitive assessment across the life-span: Methodological implications of the organismic approach. In: J.R. Nesselroade and H.W.Reese (eds.) Life-span developmental psychology: Methodological issues. New York: Academic Press, 299-316, 1973

Inhelder B. u.a. : Apprentissage et structures de la connaissance. Paris: Presses Universitaires de France, 1974

Inhelder B. u.a. : Relations entre les conservations d'ensembles d'éléments discrets et celles de quantités continues. Année psychologie 75:23-60, 1975

Kendzior E.A. : From college student to science teacher - An exploratory study based upon the experiences of two beginning biology teachers. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1971

Knamiller G. : Perceptual frameworks for viewing children's expressive activity in a science learning environment. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1971

Knamiller G. : Between experience and new perceptions. Journal of Research in Science Teaching 11:99-104, 1974

Knifong J.D. : The representation of cognitive structure of four and a half year old children. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1971

Lakatos I. : Proofs and refutations. British Journal for the Philosophy of Science 14:1-25, 120-139, 221-245, 296-342, 1963

Lazarus M. : Rx for mathophobia. Saturday Review. June 28, 46-48, 1975

Leiser D. : Semantic context and arithmetical systems - Two new cognitive structures identified. Master's thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1974

MacLane S. Birkhoff G. : Algebra. New York: Macmillan, Chs. II and XV, and passim, 1967

Piaget J. : Causality and operations. In: J.Piaget and R.Garcia (eds.) Understanding causality. New York: Norton, 1974

Piaget J. Inhelder B. : Le Développement des Quantités Physiques chez l'Enfant. Neuchatel et Paris: Delachaux et Niestlé, 1941

Piaget J. u.a. : Epistémologie et Psychologie de la Fonction. (Etudes d'Epistémologie Génétique, No.23), 1968

Piaget J. u.a. : Epistémologie et Psychologie de l'Identité. (Etudes d'Epistémologie Génétiques, No.24),1968

Rose H.N. : Eight day care children: A naturalistic study of their interacting lines of action. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus, 1974

Shirk G. : Conceptual frameworks in beginning mathematics teachers. Ph.D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign Campus, 1973

Smith F. : Twelve easy ways to make learning to read difficult. In: F.Smitz (ed.) Psycholinguistics and reading. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1973

Stake R.E. : Responsive evaluation. Center for Instructional Research and Curriculum Evaluation, University of Illinois, Urbana-Champaign campus. (mimeo), 1973

Waismann F. : Introduction to mathematical thinking. Frederick Ungar Publishing Co. (Reprinted in Harper Torchbooks, 1959)

Walker K.
Adleman C. : A guide to classroom observation. London: Methuen, 1975

Witz K.G.
Albert E. : On the process of giving an explanation. MS., 1975

Witz K.G.
Easley J.A., Jr. : Cognitive deep structure and science teaching. Presented at a conference on "Opérations et Didactiques" at the Centre de Recherche an Didactique, the University of Quebec in Montreal. Reproduced in Witz and Easley (1972, App.11.), 1971

Witz K.G.
Easley J.A., Jr. : Analysis of cognitive behavior in children. Final Report, Project No. O-0216, Grant No. OEC-0-70-2142(508) United States Department of Health, Education, and Welfare, Office of Education. 15 pp. plus 15 appendices, 1972

Witz K.G.
Easley J.A., Jr. : A new approach to cognition. To appear in L.Van den Daele, J.Pascual-Leone, and K.G.Witz (eds.) Neo-Piagetian perspectives on cognition and development. Academic Press, 1976

Witz K.G. u.a. : A cognitive model for the evaluation of units of instruction. Instructional Science 3:307-326, 1974

LEHRBÜCHER UND IHRE REALISIERUNG IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER 5. UND 6. SCHULJAHRE - ERGEBNISSE EINER UMFRAGE -

Rainer Jansen

Die Lehrbücher für den Mathematikunterricht im 5. und 6. Schuljahr umfassen bis an die 300 Seiten pro Jahrgangsband. Unserer Meinung nach besteht ein inhaltliches Überangebot, und es läßt sich erwarten, daß im Laufe eines Schuljahres nur ein Teil des Lehrangebotes bearbeitet werden kann. Da die Lehrbücher in den anschließenden Klassen zumeist ohne ausführlichen Wiederholungsteil neue Themen anbieten, die auf den Inhalten des vorangegangenen Schuljahres aufbauen, muß es zu Ausfällen bei vielen Schülern kommen.

Mit Hilfe einer Fragebogenaktion haben wir den Umfang der im 5./6. Schuljahr tatsächlich behandelten mathematischen Inhalte zu erfassen versucht. Die Analyse soll Auskunft geben über Art und Anteil der nicht behandelten Stoffe, mögliche inhaltliche Schwerpunkte der Auslassungen u.ä., um daraus Vorschläge für Lehrer, Lehrgangsgestalter und Lehrbuchautoren entwickeln zu können.

1. ERHEBUNG DER DATEN

Fragebogen: Die Erhebung stützt sich auf einen zweiseitigen Fragebogen, der sich an die Lehrer richtet, die im 5. und 6. Schuljahr Mathematik unterrichtet haben. Vom Lehrer wird verlangt, daß er die Grobgliederung des eingeführten Lehrbuches einträgt und zu jedem Abschnitt angibt, wieviel Prozent der Lehrtexte behandelt und wieviel Prozent der Übungsaufgaben bearbeitet wurden. Weiter wird danach gefragt, inwieweit Zusatzmaterialien (weitere Bücher, Lehrprogramme, Filme oder sonstige Arbeitsmaterialien) zu den einzelnen Abschnitten eingesetzt wurden.

Zusätzlich zu diesen abschnittspezifischen Angaben wird eine pauschale Schätzung verlangt, wieviel Prozent der Inhalte des eingeführten Lehrbuches insgesamt behandelt wurden. Weitere Fragen beziehen sich auf Schultyp und Schuljahr, in dem unterrichtet wurde, sowie auf den zeitlichen Umfang des erteilten Unterrichts.

Stichprobe: Es sollten sämtliche Schultypen (Haupt- und Realschulen, Gymnasien sowie Gesamtschulen) in die Umfrage einbezogen werden. Aus ökonomischen Gründen beschränkten wir die Befragung auf das Land Nordrhein-Westfalen.

Die wenigen Gesamtschulen - zum damaligen Zeitpunkt 19 - sollten vollständig erfaßt werden. Für die übrigen Schulformen haben wir nach Regierungsbezirken stratifizierte Zufallsstichproben von Schulen bzw. von Schulaufsichtsbezirken gezogen.

Bei den Hauptschulen wurden 45 Schulaufsichtsbezirke ausgewählt. Die zuständigen Schulräte wurden von uns angeschrieben mit der Bitte, die Fragebogen an sämtliche Lehrer ihres Schulaufsichtsbezirkes weiterzuleiten, die im letzten Schuljahr (1974/75) Mathematik in einer 5. oder 6. Klasse unterrichtet hatten.

Für die Realschulen und die Gymnasien haben wir jeweils eine Stichprobe einzelner Schulen gewählt, und zwar 84 Realschulen und 1o8 Gymnasien. Die Verteilung der Fragebogen lief auch hier über die zuständigen Schulaufsichtsbehörden.

Ablauf der Erhebung: Die für die Hauptschulen und die Gymnasien zuständigen Schulämter bzw. Schulkollegien wurden von uns Ende August 1975 angeschrieben, die für die Realschulen zuständigen Dezernenten Ende Oktober. Von diesen vorgesetzten Dienststellen wurden die Fragebogen dann entweder direkt oder über die Rektoren der ausgewählten Schulen an die Lehrer weitergeleitet.

Dem Fragebogen war ein Begleittext an den Lehrer beigelegt, in dem ihm die vertrauliche Behandlung seiner Angaben zugesichert wurde. Der ausgefüllte Fragebogen sollte direkt an uns zurückgesandt werden, und es wurde ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine Absenderangabe nicht erforderlich ist.

Rücklauf: Mit der Verteilung der Fragebogen auf dem 'Dienstweg' wollten wir erreichen, daß sich möglichst viele der angesprochenen Lehrer an der Umfrage beteiligen. Denn je kleiner der Anteil derjenigen ist, die den Fragebogen beantworten, umso eher muß damit gerechnet werden, daß die Ergebnisse nicht repräsentativ für die vorgesehene Stichprobe sind: die Faktoren, die die Teilnahme bedingen, hängen möglicherweise mit dem zusammen, was mit dem Fragebogen erhoben werden soll.

Leider blieb der Rücklauf der Fragebogen unbefriedigend - trotz 'Dienstweg' und trotz 'Mahnschreiben', das wir Ende Oktober an die Schulaufsichtsbehörden der Hauptschulen und der Gymnasien richteten mit der Bitte, die Schulen bzw. Lehrer, an die die Fragebogen weitergeleitet worden waren, nochmals anzusprechen und an die Beantwortung der Fragebogen zu erinnern.

Insgesamt gingen 907 ausgefüllte Fragebogen bei uns ein (Stichtag 15.1.76). In Tabelle 1 sind die nach Schuljahr und Schulform aufgeschlüsselten Zahlen aufgeführt.

Tabelle 1: Anzahl der eingegangenen Fragebogen

Schulform:	Hauptschule	Realschule	Gymnasium	Gesamtschule
5. Schuljahr	283	75	123	3
6. Schuljahr	224	72	124	3

Für Gymnasien, Haupt- und Realschulen beträgt der Rücklauf ca. 40% der Lehrer, die zur Teilnahme aufgefordert wurden.[1] Dagegen erhielten wir von sämtlichen Gesamtschulen Nordrhein-Westfalens insgesamt nur 6 Fragebogen zurück. Für die Situation der Gesamtschulen, die vorwiegend mit 'selbstgestrickten' Materialien arbeiten, war die Form des Fragebogens, die die Orientierung des Unterrichts an einem geschlossenen Lehrtext voraussetzt, offensichtlich nicht angemessen.

2. ERGEBNISSE

Grundsätzlich wurden alle eingegangenen Fragebogen in die Auswertung einbezogen. Jedoch waren die Fragebogen häufig unvollständig ausgefüllt, so daß sich für verschiedene Auswertungsgesichtspunkte unterschiedliche Fallzahlen ergeben. Wir berichten sämtliche Ergebnisse aufgeschlüsselt nach den Schulformen Hauptschule, Realschule und Gymnasium. Den wenigen Fragebogen, die wir von den Gesamtschulen erhielten, war zu entnehmen, daß sich der Unterricht nur selten an einem bestimmten Lehrbuch orientierte und daß meist eine Vielzahl von Materialien eingesetzt wurde, die zum großen Teil selbst bzw. im Rahmen schulinterner Arbeitskreise entwickelt worden waren. Diese Situation der Gesamtschulen zeichnet sich durch eine unmittelbarere Rückkoppelung zwischen Material-Vorgabe und Unterrichtspraxis aus. Sie liegt damit außerhalb unserer Fragestellung nach der Realisierbarkeit der Soll-Vorgabe 'Lehrbuch', und sie konnte mit den von uns formulierten Fragen nur unzureichend erfaßt werden. Im

---

1) Die Rücklaufquote von 40% ist nur grob geschätzt, da wir nicht genau wissen, an wieviel Lehrer die Fragebogen verteilt wurden. Zum einen ist uns nicht die genaue Zahl der Lehrer bekannt, die in den als Stichprobenelemente ausgewählten Schulen bzw. Schulaufsichtsbezirken Mathematik in den Schuljahren 5 und 6 unterrichtet haben; und zum anderen ist nur schwer kalkulierbar, inwieweit auf dem mehrstufigen Verteilungsweg Verluste eingetreten sind, die die Stichprobe der angesprochenen Lehrer reduziert haben.

weiteren wird deshalb auf die Daten der Gesamtschulen verzichtet.

Zunächst beschränken wir uns, ohne nach der Art der Lehrinhalte zu unterscheiden, auf den pauschalen Aspekt, inwieweit das Lehrangebot insgesamt im Unterricht genutzt wird. Eine Differenzierung nach Inhaltsbereichen und eine Aufschlüsselung für einzelne Lehrbücher folgt anschließend.

2.1 Die Realisierung des Lehrangebotes im Unterricht

Bevor von den Lehrern detaillierte Angaben zu den einzelnen Abschnitten der Lehrbücher verlangt wurden, sollten sie schätzen, 'wieviel Prozent der Inhalte des Buches insgesamt behandelt wurden'. Tabelle 2 gibt die mittleren Schätzwerte an.

Tabelle 2 : Durchschnittliche Bearbeitung der Lehrinhalte

Schulform:	Hauptschule	Realschule	Gymnasium
5. Schuljahr	76%	78%	77%
6. Schuljahr	78%	76%	69%

Gemäß diesen Angaben werden in den Haupt- und Realschulen sowie im 5. Schuljahr der Gymnasien ungefähr 3/4 der in den Lehrbüchern angebotenen Inhalte bearbeitet. Deutlich weniger, gut 2/3 der Lehrinhalte, sind es im 6. Schuljahr der Gymnasien[1]. In dieser Gruppe haben fast 20% der be-

1) Sämtliche Unterschiede, auf die im Text hingewiesen wird, sind statistisch signifikant - mindestens auf dem 5%-Niveau, in der Regel aber mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als 1%. Die Überprüfung auf statistische Bedeutsamkeit der Mittelwertunterschiede erfolgte je nach Art der Fragestellung mittels Varianzanalyse bzw. t-Test mit zweiseitiger Fragestellung. Nicht-signifikante Mittelwertdifferenzen werden im Text stets als Tendenz gekennzeichnet. Dies gilt in gleicher Weise für alle folgenden Abschnitte.

fragten Lehrer angegeben, von den Lehrinhalten nur die Hälfte oder weniger im Unterricht behandelt zu haben.

Ein wesentlich schlechteres Bild ergibt sich, wenn man die detaillierten Angaben der Lehrer zu den einzelnen Lehrbuchabschnitten heranzieht. Jeweils für 'Lehrtext' und 'Übungsaufgaben' haben wir pro Fragebogen den Durchschnitt der zu den einzelnen Abschnitten angegebenen Prozentwerte gebildet.[1] Die auf diesen Durchschnittswerten basierenden Mittelwerte für die einzelnen Gruppen sind in Tabelle 3 aufgeführt.

Tabelle 3 : Durchschnittliche Bearbeitung der Lehrtexte und Übungsaufgaben

Schulform:	Hauptschule	Realschule	Gymnasium
5. Schuljahr			
Lehrtext	68%	64%	65%
Übungsaufgaben	59%	56%	51%
6. Schuljahr			
Lehrtext	70%	59%	54%
Übungsaufgaben	61%	54%	45%

Zusätzlich ist in Tabelle 4 angegeben, wieviel Prozent der Lehrer 'Zusatzmaterialien' verwendeten. Als Zusatz-

1) Diese über die Lehrbuchabschnitte gemittelten Durchschnittswerte sind insofern relativ unpräzise, als sämtliche Abschnitte als gleichgewichtig behandelt werden. Wir sahen jedoch keine Möglichkeit, Kriterien für die Dimension 'Stoffmenge' aufzustellen, die eine theoretisch begründbare Gewichtung einzelner Lehrbuchabschnitte ermöglicht hätten. Unsere Durchschnittswerte sind am ehesten zu interpretieren als die Prozentsätze, zu denen das Angebot an Lehrtexten bzw. Übungsaufgaben zu den in den jeweiligen Lehrbüchern angebotenen Inhalten durchschnittlich wahrgenommen wurde.

material wurden sämtliche der in der letzten Spalte zu Frage 7 genannten Lehrmittel gewertet, die nicht unmittelbar zu dem in der Klasse eingeführten Lehrbuch gehören und die über kleinere Hilfsmittel wie Zeichendreieck und Zirkel hinausgehen. Es blieb dabei unberücksichtigt, wie häufig und zu welchen Inhalten diese Zusatzmaterialien eingesetzt wurden. Jedoch wurden die Fälle, in denen der Unterricht überwiegend mit 'Zusatzmaterialien' bestritten wurde und erkennbar war, daß der Lehrer sich grundsätzlich nicht an einem bestimmten Lehrbuch orientierte, von vornherein von der Verrechnung ausgeschlossen. Denn die geringen Prozentsätze für die durchschnittliche Bearbeitung von Lehrtexten und Übungsaufgaben, die sich in diesen Fällen ergeben, können nicht als Index mangelnder Realisierbarkeit bzw. eines Überangebots von Lehrinhalten gewertet werden.

Tabelle 4 : Prozentsatz der Lehrer, die 'Zusatzmaterialien' verwendeten

Schulform:	Hauptschule	Realschule	Gymnasium
5. Schuljahr	78%	68%	33%
6. Schuljahr	71%	63%	35%

Die aus den detaillierten Einzelangaben errechneten Durchschnittswerte von Tabelle 3 liegen generell deutlich niedriger als die pauschal geschätzten Anteile der insgesamt behandelten Lehrinhalte. Zwar können diese Unterschiede auch durch die unterschiedliche Fragestellung bedingt sein - zum einen 'behandelte Lehrinhalte', zum anderen 'bearbeitete Lehrtexte' bzw. 'Übungsaufgaben' - , jedoch ist anzunehmen, daß auch Schätzfehler eine Rolle spielen. Subjektive Beurteilungstendenzen kommen bei der pauschalen

Schätzung vermutlich stärker zum Tragen als bei den nach Lehrbuchabschnitten aufgeschlüsselten Einzelangaben, die eine stärkere Analyse und damit ein rationaleres Urteil erwarten lassen.

Die Unterschiede zwischen den Schulformen und Schuljahren sind bei den verschiedenen Indizes in etwa gleichartig. Gemittelt über die beiden Schuljahre sind die Bearbeitungsquoten am höchsten in der Hauptschule (Lehrtext: 69%, Übungsaufgaben: 60%) und am niedrigsten im Gymnasium (Lehrtext: 59%, Übungsaufgaben: 48%). Die Werte der Realschulen liegen dazwischen (Lehrtext: 62%, Übungsaufgaben: 55%). Die Bearbeitungsquoten für die Übungsaufgaben liegen generell niedriger als die der Lehrtexte.Bei den Realschulen ist der Anteil der bearbeiteten Übungsaufgaben im Verhältnis zum Anteil der bearbeiteten Lehrtexte am größten, bei den Gymnasien am kleinsten. Jedoch ist dies nur ein tendenzieller Unterschied und zu gering, um ihm großes Gewicht beizumessen.

Unterschiede bestehen auch zwischen den beiden Schuljahren, jedoch sind sie in den verschiedenen Schulformen nicht einheitlich[1]: Bei den Gymnasien sinkt die Bearbeitungsquote für die Lehrtexte vom 5. und 6. Schuljahr von 65% auf 54%, in der Realschule lediglich von 64% auf 59% und bei der Hauptschule sind die Werte mit 68% und 70% nahezu identisch. Umgekehrt betrachtet: Im 5. Schuljahr unterscheiden sich die Bearbeitungsquoten für die verschiedenen Schulformen nur geringfügig (64% bis 68%), während sich im 6. Schuljahr beträchtliche Unterschiede entwickeln: Hauptschule 70%, Realschule 59% und Gymnasium 54%. Noch deutlicher erscheinen diese Unterschiede, wenn man nicht nur die Mittelwerte der Bearbeitungsquoten, sondern deren Verteilung betrachtet: Fast 40% der Gymnasiallehrer des 6. Schuljahres geben an, weniger als

---

1) Die Wechselwirkung zwischen Schuljahr und Schulform ist für die Variablen 'behandelte Lehrinhalte' und 'bearbeitete Lehrtexte' auf dem 1%-Niveau signifikant.

die Hälfte der angebotenen Lehrtexte im Unterricht bearbeitet zu haben. Bei den Realschulen beträgt dieser Anteil knapp 30%, bei den Hauptschulen nur 13%.

Eine sehr große Diskrepanz zwischen den Schulformen besteht hinsichtlich der Verwendung von 'Zusatzmaterialien'. Gemittelt über die beiden Schuljahre - die Unterschiede zwischen ihnen sind hier relativ unwesentlich - geben 3/4 der Hauptschullehrer und 2/3 der Realschullehrer an, neben dem eingeführten Lehrbuch zusätzliche Arbeitsmaterialien im Unterricht eingesetzt zu haben. Bei den Gymnasien wird dies nur von 1/3 der Lehrer berichtet.

Insgesamt scheint der 'Stoffdruck' bei den Gymnasien am stärksten und bei den Hauptschulen am wenigsten stark. Deutlich wird dies vor allem im 6. Schuljahr. Zwar scheint man sich zu bemühen, mit dem Lehrstoff 'durchzukommen' - selbst im 6. Schuljahr der Gymnasien werden noch über 2/3 der angebotenen Lehrinhalte behandelt -, jedoch geht dies auf Kosten der Intensität, mit der die einzelnen Inhalte behandelt werden: der Anteil der 'bearbeiteten Lehrtexte' und noch mehr der Anteil des benutzten Übungsmaterials fallen beim Gymnasium gegenüber der Hauptschule erheblich ab. Am deutlichsten aber zeigt sich der Unterschied im Anteil der Lehrer, die Arbeitsmaterialien zusätzlich zum eingeführten Lehrbuch verwenden. Es ist verständlich, daß der Lehrer auf diesen 'Luxus', der für ihn selbst und für seine Schüler eine zusätzliche Belastung darstellt, unter dem Druck der zu bewältigenden Stoffmenge am ehesten verzichtet.

Zur Verläßlichkeit der Ergebnisse: Bedenken gegen die Aussagekraft unserer Ergebnisse scheinen uns aus zwei Gründen angebracht. Zum einen muß man wegen der geringen Rücklaufquote mit Stichprobenfehlern rechnen, zum anderen können Einwände gegen die inhaltliche Interpretation der Ergebnisse erhoben werden.

Zweifel an der Interpretation der niedrigen Bearbeitungsquoten von Lehrtext und Übungsaufgaben als Indiz eines inhaltlichen Überangebots der Lehrbücher kamen uns vor allem deshalb, weil zusätzlich zum eingeführten Lehrbuch relativ häufig weitere Arbeitsmaterialien eingesetzt wurden.Zwar hatten wir zur Berechnung dieser Bearbeitungsquoten von vornherein die Fälle ausgeschlossen, in denen erkennbar war, daß überwiegend 'Zusatzmaterialien' alternativ zum angegebenen Lehrbuch verwendet wurden und sich der Unterricht grundsätzlich nicht an einem bestimmten Lehrbuch orientierte, jedoch war damit noch nicht ausgeschlossen, daß für einzelne Themenkreise die Passagen des Lehrbuches weitgehend durch Alternativmaterialien ersetzt wurden, die im Fragebogen lediglich unter der Rubrik 'Zusatzmaterialien' erscheinen. In einem solchen Fall wäre es nicht gerechtfertigt gewesen, niedrige Prozentwerte für die Bearbeitung von Lehrtexten und Übungsaufgaben des eingeführten Lehrbuches generell als mangelnde Bearbeitung der Lehrinhalte zu interpretieren. Deshalb wurden auch die Prozentangaben zu einzelnen Lehrbuchabschnitten jeweils von der Verrechnung ausgenommen, wenn erkennbar war, daß Arbeitsmaterialien alternativ zu entsprechenden Passagen des Lehrbuches eingesetzt worden waren.

Häufig war den Fragebogen jedoch nicht zu entnehmen, welche Funktion den 'Zusatzmaterialien' zukam. Wir versuchten, diesen 'Störfaktor' deshalb auszuschalten, indem wir eine getrennte Auswertung nur mit den Fragebogen durchführten, in denen keinerlei zusätzliche Arbeitsmaterialien angegeben worden waren. Die Ergebnisse waren nahezu identisch mit denen der Gesamtgruppe. Der Einwand, die geringe Bearbeitung der eingeführten Lehrbücher werde durch den Einsatz von Alternativmaterialien kompensiert, konnte somit nicht bestätigt werden.

Bedenken hinsichtlich der Repräsentativität unserer Stichprobe sind dagegen - wegen der geringen Rücklaufquote von

ca. 40% - kaum auszuräumen. Es ist durchaus vorstellbar, daß die Lehrer, die das Pflichtbewußtsein oder das Engagement aufbrachten,sich an der Fragebogenaktion zu beteiligen, sich von den übrigen unterscheiden. Diese Unterschiede könnten sowohl mit dem erfragten Sachverhalt zusammenhängen als auch mit Persönlichkeitsvariablen, die die Wahrnehmung und Darstellung eines solchen Sachverhalts beeinflussen.

Verschiedene Erfahrungen und Begleitumstände im Ablauf der Datenerhebung sprechen dafür, daß subjektive Beurteilungstendenzen i.S. der 'sozialen Erwünschtheit' unsere Ergebnisse überlagern. Illustrativ ist folgende Formulierung, mit der die Ablehnung, an der Umfrage teilzunehmen, begründet wurde:

> "Sie erhalten beiliegend die uns übersandten Unterlagen wieder zurück, da an unserer Schule keine Fachkräfte den Mathematikunterricht in diesen Klassen erteilen, sondern nur Aushilfskräfte."

Zum einen muß man sich in Anbetracht solcher Reaktionen fragen, wieviel der Kollegen, die uns ihre Gründe nicht mitgeteilt haben, aus ähnlicher Situation heraus die Teilnahme verweigerten und damit zu idealisierten Ergebnissen beigetragen haben, die nicht den Beschränkungen der konkreten Unterrichtsbedingungen entsprechen. Zum anderen ist zu befürchten, daß die Daten, die uns mitgeteilt wurden, in ähnlicher Weise von Normvorstellungen geprägt sind und den tatsächlichen Sachverhalt beschönigen.

Vermutlich wurden durch den offiziellen Charakter der Erhebung - die Verteilung der Fragebogen auf dem 'Dienstweg' - Idealisierungstendenzen begünstigt. Trotz des ausdrücklichen Hinweises, daß die Fragebogen ausschließlich wissenschaftlichen Zwecken dienen und eine Absenderangabe nicht erforderlich ist, verzichteten kaum 20% der Lehrer darauf, Namen und Schule anzugeben.Häufig waren die einzelnen Fragebogen mit dem Schulstempel versehen und wur-

den uns zentral durch die Schulsekretariate zugestellt. Eine Aufschlüsselung nach anonymen und nicht-anonymen Rücksendungen ergab, daß die Bearbeitungsquoten der Lehrer, die auf eine Absenderangabe verzichteten, signifikant niedriger waren. Besonders deutlich war dieser Unterschied bei den Gymnasien: die mittlere Bearbeitungsquote für die Lehrtexte lag bei den anonymen Rücksendungen um ca. 10 Prozentpunkte niedriger (5. Schuljahr: 56%gegenüber 67%, 6. Schuljahr: 46% gegenüber 56% bei den Rücksendungen mit Absenderangabe).

Um Richtung und Ausmaß evtl. Stichprobenfehler abzuschätzen, unternahmen wir eine weitere Aufschlüsselung der Daten nach dem Zeitpunkt, zu dem die Fragebogen bei uns eingingen. Insbesondere die Fragebogen, die uns erst nach dem 'Erinnerungsschreiben' zugesandt wurden, unterschieden sich von denen, die wir vorher erhielten.

Zunächst fiel uns auf, daß der Anteil der Lehrer, die neben dem Lehrbuch die Verwendung zusätzlicher Arbeitsmaterialien angaben, stetig zunahm, je später die Fragebogen bei uns eingingen. Z.B. wurden von 20% der Gymnasiallehrer, die uns ihre ausgefüllten Fragebogen unmittelbar zurücksandten (Eingangsdatum vor dem 7.1o.75), die Verwendung von Zusatzmaterialien angegeben; bei der Gruppe der Gymnasiallehrer, die uns als letzte ihre Fragebogen zuschickten (Eingangsdatum nach dem 1o.12.75), betrug dieser Anteil 67%. Umgekehrt formuliert: die Lehrer, die sich streng an das eingeführte Lehrbuch hielten und keine zusätzlichen Arbeitsmaterialien verwendeten, erledigten auch bei der Fragebogenaktion ihre Pflicht meist unverzüglich, während die, die ihren Unterricht in freierer Form gestalteten, meist länger mit der Beantwortung der Fragebogen auf sich warten ließen oder - wie wir vermuten - sich überhaupt nicht daran beteiligten.

Die Bearbeitungsquoten für Lehrinhalte, Lehrtexte und Übungsaufgaben sind bei den später eingegangenen Frage-

bogen deutlich niedriger. Dies kann jedoch nicht mit dem verstärkten Gebrauch von Zusatzmaterialien erklärt werden. Gerade die Lehrer, die keine zusätzlichen Arbeitsmaterialien verwendeten und uns ihre Fragebogen erst später - nach dem Erinnerungsschreiben - zusandten, berichten niedrige Bearbeitungsquoten. Die mittleren Prozentwerte für die Bearbeitung der Lehrtexte sind aufgeschlüsselt nach Eingangsdatum und nach der Verwendung von Zusatzmaterialien in Tabelle 5 zusammengestellt.[1)]

Tabelle 5 : Bearbeitungsquoten der Lehrtexte, aufgeschlüsselt nach Eingangsdatum und der Verwendung von Zusatzmaterialien

	Eingang des Fragebogens	
	bis 3.11.75	nach 3.11.75
Hauptschule		
mit Zusatzmaterial	68%	69%
ohne Zusatzmaterial	71%	63%
Gymnasium		
mit Zusatzmaterial	57%	60%
ohne Zusatzmaterial	62%	52%

Zwar ließe sich aus diesen Daten eine Typologie des Lehrers ableiten, jedoch ist für uns nur wesentlich, daß mit dem Zeitpunkt des Rücklaufs systematische Stichprobenunterschiede einhergehen. Es ist anzunehmen, daß die Lehrer, die überhaupt nicht an der Erhebung teilgenommen haben, sich von unserer Stichprobe unterscheiden. Wenn schon diejenigen geringere Bearbeitungsquoten erreichten, die ihren Fragebogen

1) In Tab.5 sind nur die Werte von Hauptschule und Gymnasium aufgeführt. Da die Realschule erst später in die Untersuchung einbezogen wurde, keine Mahnschreiben erhielt und deshalb der Zeitraum zwischen Versand und Rückgang der Fragebogen weniger stark variierte, kommt der bei Hauptschule und Gymnasium aufgefundene Zusammenhang hier nur entsprechend schwächer zum Ausdruck.

später, erst nach einem 'Erinnerungsschreiben' ausgefüllt an uns zurückgesandt haben, so muß man vermuten, daß die Lehrer, die den Fragebogen auch dann noch nicht beantworteten, noch weniger mit der Stoffülle zurecht kamen. Die tatsächliche Situation ist deshalb wahrscheinlich noch ungünstiger, als die von uns genannten Durchschnittswerte erscheinen lassen.

2.2 Aufschlüsselung nach Lehrbüchern und Inhaltsbereichen

Bislang haben wir uns, ohne nach der Art der Lehrinhalte zu unterscheiden, auf den pauschalen Aspekt beschränkt, inwieweit das Lehrangebot insgesamt im Unterricht genutzt wird. Daneben scheint uns wichtig, welche Inhalte bevorzugt vom Lehrer behandelt werden und welche am stärksten unter dem inhaltlichen Überangebot der Lehrbücher leiden.

Wir haben zunächst jeweils die Angaben für die einzelnen Lehrbücher ausgewertet. Insgesamt wurden von den Lehrern unserer Stichprobe 25 verschiedene Lehrwerke eingesetzt. Die Häufigkeit, mit der sie benutzt wurden, sind in Tabelle 6 angegeben.

Auffallend ist die extrem schiefe Verteilung dieser Häufigkeiten bei der Hauptschule. Zu 66% im 5. Schuljahr und zu 82% im 6. Schuljahr wurde 'Die Welt der Zahl' von Oehl/Palzkill verwendet. Auch 'Die Welt der Zahl - Neu' der gleichen Verfasser wurde noch öfters genannt - andere Bücher nur selten. In den Realschulen und Gymnasien dagegen sind es jeweils 5 bis 6 Bücher, die miteinander konkurrieren.

Bei der Auswertung zu diesen einzelnen Lehrbüchern, beschränkten wir uns auf die, die jeweils in den drei Schulformen am häufigsten verwendet wurden. Wir berechneten zu jedem Abschnitt der Grobgliederung die durchschnittlichen Prozentwerte für die Bearbeitung von Lehrtext und Übungsaufgaben sowie den Prozentsatz der Lehrer,

Tabelle 6 : Häufigkeit der benutzten Lehrbücher

Lehrbuch	Hauptschule Schuljahr 5.	6.	Realschule Schuljahr 5.	6.	Gymnasium Schuljahr 5.	6.	Häufigkeit insgesamt
Abele/Besuden: Mathematische Impulse	1	-	-	-	-	-	1
Andelfinger/Nestle: Mathematik	3	1	5	5	4	5	23
Athen/Griesel: Mathematik heute	1	1	-	-	12	11	25
Baldermann/Bergmann: Mathematik	-	-	2	2	-	-	4
Breidenbach: Math.für Realschulen	-	-	15	16	-	-	31
Fricke: Mathematische Impulse	-	-	2	2	-	-	4
Griesel/Sprockhoff: Welt der Zahl	4	-	-	-	-	-	4
Hahn: Mathematik	-	-	-	-	4	2	6
Koschemann: Rechnen/Geometrie	-	-	-	1	-	-	1
Kusch-Aits: Mathematik	-	-	8	8	-	-	16
Kuypers et al: Math.für Gymnasien	-	-	-	-	17	11	28
Kuypers et al: Math.Orientierungsstufe	-	-	1	1	18	2o	4o
Lambacher/Schweizer: Rechnen u. Raumlehre	-	1	-	-	29	32	62
Luscher/Wagemann: Das Bagel-Rechenbuch	3	1	-	-	-	-	4

Tabelle 6 : Häufigkeit der benutzten Lehrbücher

Fortsetzung

Lehrbuch	Hauptschule Schuljahr 5.	6.	Realschule Schuljahr 5.	6.	Gymnasium Schuljahr 5.	6.	Häufigkeit insgesamt
Neunzig: Wir lernen Mathematik	3	-	-	-	-	-	3
Nordmeier: Westermann Mathematik	15	6	-	-	-	-	21
Oehl/Evers/Kastrop: Welt und Zahl	-	-	-	2	-	-	2
Oehl/Palzkill: Die Welt der Zahl	187	184	-	-	-	-	371
Oehl/Palzkill: Die Welt der Zahl-Neu	45	21	-	-	-	-	66
Reidt/Wolff/Athen: Elemente d.Mathematik	-	-	-	-	3	2	5
Scheid u.a.: Mathematik	-	-	2	1	-	-	3
Schröder/Uchtmann: Einführung i.d.Math.	5	3	17	12	12	2o	69
Traeger/Unger: Mathem.Arbeitsbuch	8	2	13	12	-	-	35
Winter/Ziegler: Neue Mathematik	8	4	1o	1o	1	1	34
Wörle: Mathematik	-	-	-	-	23	2o	43

die Zusatzmaterialien zu dem jeweiligen Abschnitt verwendeten. Um zu unterscheiden, ob ein Abschnitt überhaupt nicht in Angriff genommen, also der Lehrinhalt vollständig ausgelassen

wurde, oder ob nur die Lehrmaterialien zu einem geringen Teil genutzt wurden, bestimmten wir zusätzlich den Prozentsatz der Lehrer, die den Abschnitt bearbeiteten (mindestens eine Angabe zu Lehrtext oder Übungsaufgaben größer als 0%). Für diese Gruppe wurden die durchschnittlichen Bearbeitungsquoten nochmals gesondert berechnet.

Diese Daten zu den einzelnen Lehrbuchabschnitten sind sicherlich interessant, wenn man bestimmte Lehrbücher analysieren will. Sie sind in einer ausführlichen Materialsammlung zusammengestellt und können bei Bedarf bei uns angefordert werden. Über die Spezifität einzelner Lehrbücher generalisierte Aussagen verlangen jedoch ein gröberes Schema der Datenreduktion.

Wir gingen deshalb von drei umfassenden Inhaltsbereichen aus, nämlich 'Numerisches', 'Moderne Mathematik' und 'Geometrie', in die wir die einzelnen Lehrbuchabschnitte einordneten, und berechneten für diese die verschiedenen Bearbeitungsquoten. Der Bereich 'Geometrie' ist relativ eindeutig, 'Numerisches' und 'Moderne Mathematik' dagegen ließen sich teilweise nur schwer voneinander trennen. Jedoch hätte eine feinere Einteilung die Schwierigkeiten nur vergrößert.

Die verschiedenen Bearbeitungsquoten für die drei Inhaltsbereiche sind getrennt nach Schulform und Schuljahr in den Tabellen 7 - 9 aufgeführt. Für die durchschnittliche Bearbeitung der Lehrtexte ergibt sich folgendes Bild: In der Realschule und im Gymnasium werden ca. 2/3 der zu dem Inhaltsbereich 'Numerisches' angebotenen Lehrtexte bearbeitet. In der Hauptschule liegt die Bearbeitungsquote für 'Numerisches' noch etwas höher - im 6. Schuljahr bei 75%. Die Lehrtexte zur Geometrie werden generell erheblich schwächer bearbeitet: in Haupt- und Realschule etwa zur Hälfte, im Gymnasium noch weniger - zu 42% im 5. und zu 35% im 6. Schuljahr.

Tabelle 7 : Durchschnittliche Bearbeitung der angebotenen Lehrtexte zu den Inhaltsbereichen: Numerisches, Geometrie und 'Moderne Mathematik'

Schulform:	Haupt-schule	Real-schule	Gymnasium
5. Schuljahr			
Numerisches	70%	66%	69%
Geometrie	52%	53%	42%
Mod. Math.	80%	84%	83%
6. Schuljahr			
Numerisches	75%	66%	66%
Geometrie	56%	48%	35%
Mod. Math.	50%	58%	26%

Tabelle 8 : Durchschnittliche Bearbeitung der angebotenen Übungsaufgaben zu den einzelnen Inhaltsbereichen

Schulform:	Haupt-schule	Real-schule	Gymnasium
5. Schuljahr			
Numerisches	61%	59%	55%
Geometrie	48%	44%	31%
Mod. Math.	71%	75%	66%
6. Schuljahr			
Numerisches	65%	61%	56%
Geometrie	50%	45%	28%
Mod. Math.	47%	52%	23%

Während sich die Bearbeitungsquoten zu 'Numerisches' und 'Geometrie' nur geringfügig zwischen den beiden Schuljahren unterscheiden, besteht eine sehr große Diskrepanz bei dem Inhaltsbereich 'Moderne Mathematik'.[1] Im 5. Schuljahr sind die Bearbeitungsquoten zur 'Modernen Mathematik' gegenüber den anderen Inhaltsbereichen jeweils die höchsten. Sie liegen mit 80% bis 84% sogar deutlich über denen der numerischen Inhalte. Im 6. Schuljahr aber fällt die 'Moderne Mathematik' sehr stark ab: bei der Haupt- und Realschule auf 50% bzw. 58%, beim Gymnasium sogar auf 26% - hier werden nur noch 1/4 der zur 'Modernen Mathematik' angebotenen Lehrtexte bearbeitet.

Tabelle 9 : Prozentsatz der Lehrer, die 'Zusatzmaterialien' zu den einzelnen Inhaltsbereichen verwendeten

Schulform:	Hauptschule	Realschule	Gymnasium
5. Schuljahr			
Numerisches	75%	52%	25%
Geometrie	61%	45%	19%
Mod.Math.	71%	65%	21%
6. Schuljahr			
Numerisches	66%	46%	28%
Geometrie	60%	60%	24%
Mod.Math.	48%	43%	8%

1) Inhalte der 'Modernen Mathematik' kommen nur in einem Teil der eingeführten Lehrbücher vor. Da die Bearbeitungsquoten für Lehrtext und Übungsaufgaben keine absoluten Größen sind, sondern angeben, inwieweit das Angebot an Lehrmaterialien wahrgenommen wird, beruhen die Daten zum Inhaltsbereich der 'Modernen Mathematik' auf einer entsprechend reduzierten Teilstichprobe. Auch die Prozentangaben zur Verwendung von Zusatzmaterialien zum Inhaltsbereich der 'Modernen Mathematik' (Tab.9) beziehen sich auf die Basis dieser Teilstichprobe.

Die Bearbeitungsquoten für die Übungsaufgaben liegen generell unter denen der Lehrtexte. Sie differenzieren jedoch in gleicher Weise zwischen den Inhaltsbereichen. Relativ gering sind demgegenüber die Unterschiede in der Verwendung von Zusatzmaterialien. Hier tritt der Abfall der Geometrie gegenüber den anderen Inhaltsbereichen nicht in Erscheinung. Zwar wird das Lehrangebot zur Geometrie in geringerem Maße wahrgenommen, jedoch wird der Geometrieunterricht stärker mit Zusatzmaterialien angereichert. Vor allem werden Hilfsmittel zur Veranschaulichung eingesetzt, die entweder aus den Beständen der Schule stammen oder von den Lehrern selbst angefertigt werden.

Die Ergebnisse der nach Inhaltsbereichen aufgeschlüsselten Daten lassen sich dahingehend zusammenfassen, daß im 5. Schuljahr bevorzugt die Lehrinhalte 'Numerisches' und 'Moderne Mathematik' bearbeitet werden, während die 'Geometrie' am ehesten vernachlässigt wird. Im 6. Schuljahr konzentriert sich der Unterricht noch stärker auf den 'Pflichtkanon' des Numerischen, und die Inhalte der Modernen Mathematik werden neben der Geometrie erst zweitrangig behandelt. Diese inhaltliche Differenzierung ist besonders stark in den Gymnasien, während in der Realschule und auch in der Hauptschule eher ein Ausgleich gegeben ist.

Bei der Bewertung dieses Sachverhalts muß man berücksichtigen, daß die Rangfolge der behandelten Lehrinhalte teilweise schon durch deren Anordnung in den Lehrbüchern vorgegeben ist. Die Bearbeitungsquoten für die einzelnen Lehrbuchabschnitte zeigen im allgemeinen einen Abfall entsprechend ihrer Reihenfolge im Lehrbuch. Besonders deutlich zeigt sich dies im Anteil der Klassen, in denen der jeweilige Abschnitt behandelt bzw. vollständig ausgelassen wurde. In der Regel fängt man eben mit dem ersten Abschnitt des Lehrbuchs an und kommt soweit, wie es die Zeit erlaubt.

Vor allem die Geometrie ist häufig erst im Schlußteil des Lehrbuchs untergebracht und wird entsprechend selten bearbeitet. Jedoch setzen auch die Lehrer unabhängig von der Anordnung des Lehrbuches Prioritäten. Häufig werden Abschnitte zur Geometrie übersprungen oder nur sehr selektiv bearbeitet.

Inhalte der 'Modernen Mathematik' werden in den Jahrgangsbänden für das 5. Schuljahr meist als einleitende Kapitel gebracht und weisen entsprechend hohe Bearbeitungsquoten auf. Ihr Absinken im 6. Schuljahr ist jedoch nicht allein mit der Anordnung der Lehrbücher zu erklären. Insbesondere bei den Inhaltsbereichen der 'Modernen Mathematik' muß man beachten, daß unterschiedliche Lehrinhalte unter diesem Begriff subsumiert wurden. Bei den Jahrgangsbänden zum 5. Schuljahr besteht der Inhaltsbereich der 'Modernen Mathematik' vorwiegend aus Grundbegriffen der Mengenlehre und einführenden Abschnitten zum Thema Mengen und natürliche Zahlen. Für das 6. Schuljahr werden dagegen eher vereinzelte Zugaben aus dem Bereich der 'Modernen Mathematik' angeboten, besonders für die Gymnasien, darunter auch ausgefallenere Themen wie z.B. Gruppentheorie (Lambacher/Schweizer) oder Wahrscheinlichkeitsrechnung (Athen/Griesel), die im Unterricht nur selten behandelt werden.

2.3 Der Einfluß des 'Stoffdrucks' auf die Auswahl der Unterrichtsinhalte

Es ist zu erwarten, daß ein Überangebot an Lehrinhalten sich umso stärker auswirkt, je weniger Zeit zur Bearbeitung der Lehrinhalte zur Verfügung steht. Die Selektion der Unterrichtsinhalte muß sich mit dem Ausmaß des 'Stoffdrucks' notwendig verschärfen. Wir erwarten deshalb weiteren Aufschluß über die inhaltlichen Prioritäten von einer Aufschlüsselung der Daten nach dem zeitlichen Umfang des erteilten Mathematikunterrichts.

Im Fragebogen hatten wir zum einen nach der Anzahl der Unterrichtsstunden gefragt, die planmäßig für das Fach Mathematik pro Woche vorgesehen waren, und zum anderen nach der Zahl der Unterrichtsstunden, die davon ausgefallen sind oder nicht-mathematisch vertreten wurden. Aufgrund dieser Angaben versuchten wir, die Anzahl der Mathematikstunden abzuschätzen, die im gesamten Schuljahr erteilt wurden. Dabei sind wir von 36 Unterrichtswochen pro Schuljahr ausgegangen.

Die Zahl der planmäßigen Wochenstunden variierte zwischen 3 und 6. In der Regel - zu ca. 80% - wurde sie mit 4 angegeben. Der Mittelwert betrug 4,3 für die Hauptschule, 4,1 für die Realschule und 3,9 Wochenstunden für die Gymnasien. Der Umfang des ausgefallenen bzw. nicht-mathematisch vertretenen Unterrichts wurde durchschnittlich mit ca. 9 Unterrichtsstunden im Jahr angegeben. Dabei zeigte sich kein Unterschied zwischen den Schulformen. Jedoch streuen die angegebenen Werte ganz erheblich. In Extremfällen ist bis zur Hälfte der vorgesehenen Unterrichtszeit ausgefallen.

Für die errechnete Anzahl der tatsächlich erteilten Unterrichtsstunden wurden Intervalle gebildet und die Bearbeitungsquoten wurden getrennt nach den entsprechenden Gruppen unterschiedlicher Unterrichtszeit ausgezählt. Die pauschalen Bearbeitungsquoten der Lehrmaterialien sind in Tabelle 10 aufgeführt.

Tabelle 10 : Bearbeitungsquoten, aufgeschlüsselt nach der Anzahl der Unterrichtsstunden

Anzahl der Mathematikstunden im Jahr:	weniger als 127	127 bis 144	mehr als 144
Lehrinhalte	71%	76%	79%
Lehrtexte	60%	65%	70%
Übungsaufgaben	53%	55%	63%
Verwendung von Zusatzmaterialien	58%	60%	75%

Der Zusammenhang, der sich hier zwischen dem zeitlichen Umfang des Unterrichts und der Bearbeitung der Lehrinhalte bzw. der einzelnen Lehrmaterialien zeigt, ist nicht überraschend. Er ist am stärksten im Gymnasium ausgeprägt, weniger deutlich in der Realschule. Jedoch sind die Unterschiede der Effekte zwischen den verschiedenen Schulformen statistisch nicht signifikant, so daß wir auf die Aufschlüsselung nach Schulformen verzichten können.

Dies gilt auch für die Bearbeitungsquoten der einzelnen Inhaltsbereiche. Sie sollen uns Aufschluß geben über den Einfluß des Zeitdrucks auf die Auswahl der Lehrinhalte. Tabelle 11 gibt die entsprechend aufgeschlüsselten Bearbeitungsquoten der Lehrtexte wieder.

Tabelle 11 : Durchschnittliche Bearbeitung der angebotenen Lehrtexte zu den einzelnen Inhaltsbereichen, aufgeschlüsselt nach der Anzahl der Unterrichtsstunden

Anzahl der Mathematikstunden im Jahr:	weniger als 127	127 bis 144	mehr als 144
Numerisches	67%	69%	72%
Geometrie	42%	48%	61%
Mod. Math.	62%	70%	72%

Offensichtlich ist die Bearbeitung des Inhaltsbereichs Geometrie am stärksten von der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit abhängig. In der Gruppe mit geringer Unterrichtszeit werden die Lehrtexte zur Geometrie nur zu durchschnittlich 42% bearbeitet, während die Gruppe, der die meiste Unterrichtszeit zur Verfügung stand, immerhin eine Bearbeitungsquote von 61% erreicht. Für die Inhaltsbereiche 'Numerisches' und 'Moderne Mathematik' ist der entsprechende Unterschied bedeutend geringer (67% zu 72%

bzw. 62% zu 72%). Gleichartige Unterschiede bestehen bezüglich der Bearbeitung von Übungsaufgaben und der Verwendung von Zusatzmaterialien. Es scheint uns deshalb die Interpretation gerechtfertigt, daß die Inhalte der Geometrie unter Zeitdruck als erste ausgeklammert werden und somit am stärksten unter dem Überangebot an Lehrinhalten leiden.

Diese Aussage wird weiter gestützt durch eine Aufschlüsselung der inhaltsspezifischen Bearbeitungsquoten nach dem Umfang der Gesamtbearbeitung. In Tabelle 12 sind die Ergebnisse der einzelnen Schulformen für die durchschnittliche Bearbeitung der Lehrtexte zusammengestellt.

Tabelle 12 : Durchschnittliche Bearbeitung der angebotenen Lehrtexte zu den einzelnen Inhaltsbereichen, aufgeschlüsselt nach dem Umfang der Gesamtbearbeitung

Bearbeitung der Lehrinhalte insgesamt:	bis 50%	51% bis 65%	66% bis 80%	mehr als 80%
Hauptschule				
Numerisches	52%	57%	72%	83%
Geometrie	30%	44%	52%	68%
Mod. Math.	48%	49%	77%	77%
Realschule[1]				
Numerisches	-	54%	65%	75%
Geometrie	-	24%	50%	64%
Mod. Math.	-	59%	72%	68%
Gymnasium				
Numerisches	55%	62%	70%	79%
Geometrie	10%	23%	38%	66%
Mod. Math.	55%	48%	57%	56%

1) Von den Realschullehrern wurde nur in 3 Fällen angegeben, die Lehrinhalte zu 50% oder weniger behandelt zu haben. Wir haben deshalb hier die beiden ersten Intervalle zu einem zusammengefaßt.

Auch hier sind es die Bearbeitungsquoten der Geometrie, die am stärksten zwischen den Gruppen variieren. Wenn im Unterricht nur ein geringer Teil des Lehrangebots bewältigt werden kann, so geht dies vor allem zu Lasten der geometrischen Inhalte. Während das Numerische und auch Teile der Modernen Mathematik überwiegend als 'Pflicht' angesehen werden, scheint die Geometrie eher als freiwillige Zutat zu gelten, die sein kann, aber nicht sein muß.

Dies gilt vor allem für das Gymnasium: Von den Lehrern, die angeben, nur die Hälfte oder weniger der Lehrinhalte behandelt zu haben, werden die Lehrtexte zur Geometrie nur zu durchschnittlich 10% bearbeitet. In der entsprechenden Gruppe der Hauptschule beträgt diese Bearbeitungsquote immerhin noch 30% - hier sind die inhaltlichen Schwerpunkte weniger deutlich ausgeprägt.

Die in Tabelle 12 angegebenen Zahlen sind die Mittel der Durchschnittswerte für die beiden Schuljahre. Wir haben uns darauf beschränkt, weil die Effekte im 5. und 6. Schuljahr in etwa gleichartig verlaufen, und die Wechselwirkung mit dem Schuljahr im allgemeinen statistisch nicht signifikant ist. Tendenzielle Unterschiede gehen dahin, daß bei Gymnasium und Hauptschule der Anstieg der Bearbeitungsquoten der Geometrie mit dem Umfang der Gesamtbearbeitung im 5. Schuljahr gegenüber dem 6. steiler verläuft. Dagegen sind die Bearbeitungsquoten der Modernen Mathematik im 5. Schuljahr relativ konstant für die Gruppen unterschiedlicher Gesamtbearbeitung, während sich im 6. Schuljahr größere Unterschiede ergeben. Dies deckt sich mit unserer früheren Interpretation, daß sich der Stoffdruck im 5. Schuljahr vor allem zu Lasten der Geometrie auswirkt, während die einführenden Abschnitte zur Mengenlehre und zum Thema Mengen und natürliche Zahlen eher als verbindlich angesehen werden. Erst im 6. Schuljahr werden neben den Inhalten der Geometrie auch die der Modernen Mathematik zugunsten des Numerischen zurückgestellt.

3. ZUSAMMENFASSUNG

Mit Hilfe einer Fragebogenaktion zum Mathematikunterricht des 5. und 6. Schuljahres versuchten wir zu erfassen, inwieweit die in den Lehrbüchern angebotenen Inhalte im Unterricht tatsächlich behandelt werden. An der Umfrage beteiligten sich mehr als 900 Lehrer von Gymnasien, Haupt- und Realschulen des Landes Nordrhein-Westfalen. Ihre Angaben beziehen sich auf das Schuljahr 1974/75.

Gemäß unseren Daten werden im 5. Schuljahr noch ca. 3/4 der angebotenen Lehrinhalte behandelt. Im 6. Schuljahr macht sich das Überangebot an Lehrinhalten stärker bemerkbar - vorwiegend bei den Gymnasien, weniger deutlich auch bei den Realschulen. Nur noch die Hälfte des Lehrangebots kann im 6. Schuljahr der Gymnasien im Unterricht realisiert werden.

Der Stoffdruck geht eindeutig am stärksten zu Lasten der Geometrie. Auch Inhalte der Modernen Mathematik werden, soweit sie über einführende Abschnitte der Mengenlehre hinausgehen, eher vernachlässigt. Der 'Pflichtkanon' beschränkt sich weitgehend auf den Bereich des Numerischen.

Verschiedene Aspekte der Erhebung und ihrer Ergebnisse lassen vermuten, daß die tatsächliche Situation noch ungünstiger und unausgewogener ist, als die von uns genannten Daten erscheinen lassen.

A CONTRIBUTION TO THE ANALYSIS OF ARITHMETIC TEACHING AND LEARNING

W. Kilborn, U.P. Lundgren

1. INTRODUCTION

This article is written for the first DIMO-workshop. Our intention is to give a basis for a discussion around curriculum research in mathematics. The research project here described is carried out within a research group working with the development of a comprehensive theory concerning relations between frame factors (i.e. factors that constrain the teacher's choice of strategy for teaching) and the teaching process in the classroom (cf Dahllöf 1971, Lundgren 1972). This research is sponsored by the Tercentary Fund of the Bank of Sweden and the Swedish National Board of Education. The points of view, selection of facts, and opinions expressed in this article are those of the authors and do not necessarily coincide with the official positions of the funding agencies.

2. THE GENERAL BACKGROUND

After the Second World War most western countries changed and reconstructed their educational systems comprehensively. Basically these reforms were organizational to their nature. The curricular reforms were more consequences of changed organizations than prime targets in themselves. For mathematics teaching the curriculum reforms at the comprehensive school level entailed a shift of emphasis from memorization and mechanical arithmetic to learning based on understanding of mathematical structures.

We will in the discussion of the curriculum, center this article to the Swedish school systems. However, the changes alluded to above were not intrinsically particular to Swe-

den. Curricular reforms in the US have distinctly moved in this direction ever since the end of the fifties. There can be no denying of the influence exerted of curricular reforms in the US on curricular change in Sweden concerning the teaching of mathematics.

The research supporting these curricular changes is limited. Most of the changes have to be explained more by influence of experienced mathematics experts than by systematic studies of teaching and learning mathematics. The research that existed at the time for the curricular reforms were broadly sketched of two types. On one hand there were isolated empiric studies of mathematical activity and its correlates to variables of importance for instruction, as for example language understanding (cf Aiken 1972). On the other hand there were studies concerning classroom teaching (cf Lundgren 1972, 1973, Dunkin and Biddle 1975). But these later studies concerned the general patterns and were with few exceptions (cf Wright and Proctor 1961, Lundgren 1972) concentrating on mathematics teaching. At the time for the reforms few if any studies were carried out which supported with a basis for the reforms. "Although the expected outcomes of teaching the structure are admirable and certainly to be valued, there is little evidence to support them. A central problem for instructional research, then is to examine the communication of structure from the teachers and/or from the instructional material to the learner," (Shavelson 1973, p.2).

The comprehensive school in Sweden was implemented in 1962. During a ten-years' period up to 1972 the resources to remedial teaching had increased almost three times. About 8% of these resources were directed to mathematics. If resources to teaching of special handicapped children (as speech-hearing-etc-difficulties) are not counted, about 25% of the resources are allocated to mathematics teaching (cf SOU 1974:53). Experiments with more decentralised decisions on how to use personal resources show approximately the same

results (Kilborn and Ludgren 1974a, b; 1975).

From this point of view - the use of remedial teaching - it is obvious that the mathematics curriculum in the comprehensive school must be reformed and that the first reforms failed.

From the research point of view it is utterly important to search for the answer to the question: What are the main structures that form the differentiation within the class?

In order to find an answer, earlier research gives few starting points. Research on teaching (cf Dunkin and Biddle 1975) has been too general and more or less exclusively concerned with behavior patterns in the classroom, not with the content of the teaching (cf Lundgren 1973, Kilborn and Lundgren 1973). A first step for research must than be to find a way of describing the transformation of the curriculum in the teaching situation. The characteristic of earlier research on teaching is that the phenomena of teaching are described in psychological terms and not in terms of content and then explained in relation to psychological knowledge. The attempts to find an explanation of why the teaching process follows a certain pattern have with some few exceptions (cf Smith and Meux 1961, Bellack et al 1966, Lundgren 1972, 1974) been built into the descriptions. This means that the teachers' and the students' actions have been described in terms of a specific psychological theory, which then in the descriptions functions as the explanation of the results.The second consequence of this is that the explanation is looked for in the behavior of the acting persons per se not in the actions in relation to the context (i.e.the structure of the curriculum, the structure of the teaching materials, class size, composition of the class, time at disposal etc).

DAHLLÖF (1971) has formulated a research paradigm within research on teaching, elaborated by LUNDGREN (1972, 1973, 1974) which, in contrast to the existing paradigm, basically de-

scribes the pattern of teaching from variables in the teaching context. We will here just sketch the outlines of that theory.

The theoretical model is simple. We show its three components in a paradigm:

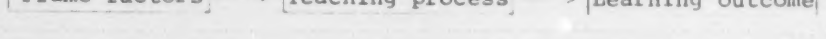


Fig. 1. The general model.

This paradigm expresses in a general way the relations which probably have guided most educational planners. The difference between this model and the others lies in the definitions of the concepts and the assumed relations.

Our basic assumptions are given in the notions on the teaching process. The teaching process is a steered process. A process made up of transformations having a position in time and a prolongation in time. The key concepts are transformation, time and steering. A structural activity always has the form of a transformation system. These transformations are regulated by rules (cf Gustafsson 1975). These rules in their turn are consequences of two main factors. The frames given for the situation and the goals for the process. The concept of frames has already been exemplified and explained. The goals of the teaching steer the direction of the process and can in some instances be classified as a frame (cf Lundgren 1972).

Those are the basic assumptions:

A. The teaching process is a system of transformations following a set of rules.

B. These rules are consequences of the organizational frames and the time frame.

C. The meaning of the actions which define the transformation is steered by the intention of the participants.

The starting point for an empirical study of the relations between frames and process must then start with the intentions of the participant. From the perspective here, broadly sketched, the intentions have to be interpreted in relation to the goals and thereby in relation to the curriculum.

Now closing the circle, we return to the questions: What are the main obstacles in mathematics teaching that form the differentiation within the class?

We have so far stated that the first step must be to describe the actions in the teaching process in terms of the curriculum content. The second step is to analyze this description in relation to the frames given for the teaching.

The discussion up to this point has illuminated the general purpose of our research and the theoretical context. In other words, the aim of this research project could be stated in the following way:

The primary aim of the project is to develop a diagnostic instrument for arithmetic which can

a) be used to describe the teaching of mathematics

b) be used by the teacher in order to base the decisions in various situations of educational choice. (We refer here to both a long-term strategy in the design of teaching and to a short-term strategy in a particular teaching situation.)

The second aim of the project is to test and further develop a theoretical model of teaching in order to explain the structure of the teaching process in terms of contextual constraints.

These aims then have two directions. One which primarily can be described as providing a better knowledge as a basis for

curriculum decision. The other to furnish the teacher on a practical level with an instrument that makes it possible to plan the teaching better and to discover and thereby manipulate some organizational constraints.

3. THE STRATEGY

In the following presentation we will concentrate on the development of the instrument and thereby on the description of the teaching process. Our purpose with this paper is ultimately to describe the strategy of the research work up to the point where the analysis starts.

The first task was to develop a chart illustrating the interconnection of the different items of the actual arithmetic course. The idea is here to find a general strategy on the basis of knowledge of what should be treated before a particular item and what is ultimately contingent upon a particular item. This opens up completely new possibilities for solving the concrete problems of individualization. In the practical use of an elaborated chart the teacher will have a basis on which there are to find individual study routes for pupils as well as it gives a plan of the content.

This general strategy also has a broader curricular implication. A curricular recommendation (supplement in the Swedish national curricula) is unrealistic and impractical without the aid of an instrument indicating the mutual relationship of the various subject items in terms of the teacher's perspective and teaching frames. The proposals in mathematics curriculum recommendations often solve only an acute problem and are devoid of any long-term effect.

Concerning short-term strategy, our aim is to develop the diagnostic instrument for various decision making situations. These decision making situations are, above all, concerned with changes of items or the closer definition of a goal level. Decisions of this kind are based on the teacher's

view of the network of knowledge and the previous knowledge commanded by the pupils, but also on experience and knowledge concerning the alternative courses of action available. These short-term strategic instruments or diagnostic tests are designed to simplify such information and to supply knowledge not only as to how a question is to be stated but also to which question should be asked and when it should be asked.

Concerning the analysis of teaching the strategy is, when using these instruments, to describe the teaching and from these descriptions study the variances in constraints. What can be mapped out here are the limits of the constraints. Within these limits we obviously have degrees of freedom. Using an experimental or quasiexperimental design it is assumed that these degrees of freedom can be marked out through analysing classes where the instrument is used by the teachers and classes where it is not used. With reference to the acute demands on remedial teaching special analysis will be done of the so-called low-performers' achievement and their teaching situation.

4. THE INSTRUMENT

As the first step in constructing the instrument the six "main terms" in arithmetic are arranged in the following simplified diagram (cf Kilborn 1972):

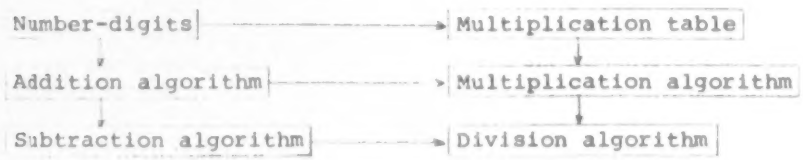


Fig. 2 The six "main items" in arithmetic in a flow chart diagram.

The diagram is then broken down into smaller sub-charts. Up to this point we have got five sub-charts or matrices:

A - addition
S - subtraction
M - multiplication
d - division (one figure in the denominator)
D - division (two figures in the denominator)

The structure of the matrix (fig. 3) is as follows: In order to be able to work on the item in square M43 one must be able to solve the items in squares M42 and M23. If one cannot master the item in square M23 the answer can be given if the pupil can solve the items in squares MO3 and M12 etc. A necessary previous knowledge to one item is always indicated in the squares above and to the left of the first square (cf Johansson and Kilborn 1974, 1975).

Using the matrix it is now possible to construct a battery of diagnostic tests. The diagnostic test corresponding to "multiplication with one figure carried over" (square M42) may then be as follows:

61	41
.12	.14
51	31
.12	.15

As sub-diagnosis of this kind takes only a short time to administer and is easy to correct.

The following examples illustrate the use of the matrix:

Suppose that the teacher is going to teach multiplication with carry type M43 during next session. Then he/she can give the sub-diagnoses M42 and M23 to the pupils.

- The pupils who are able to solve the test items are also able to start with carrying.

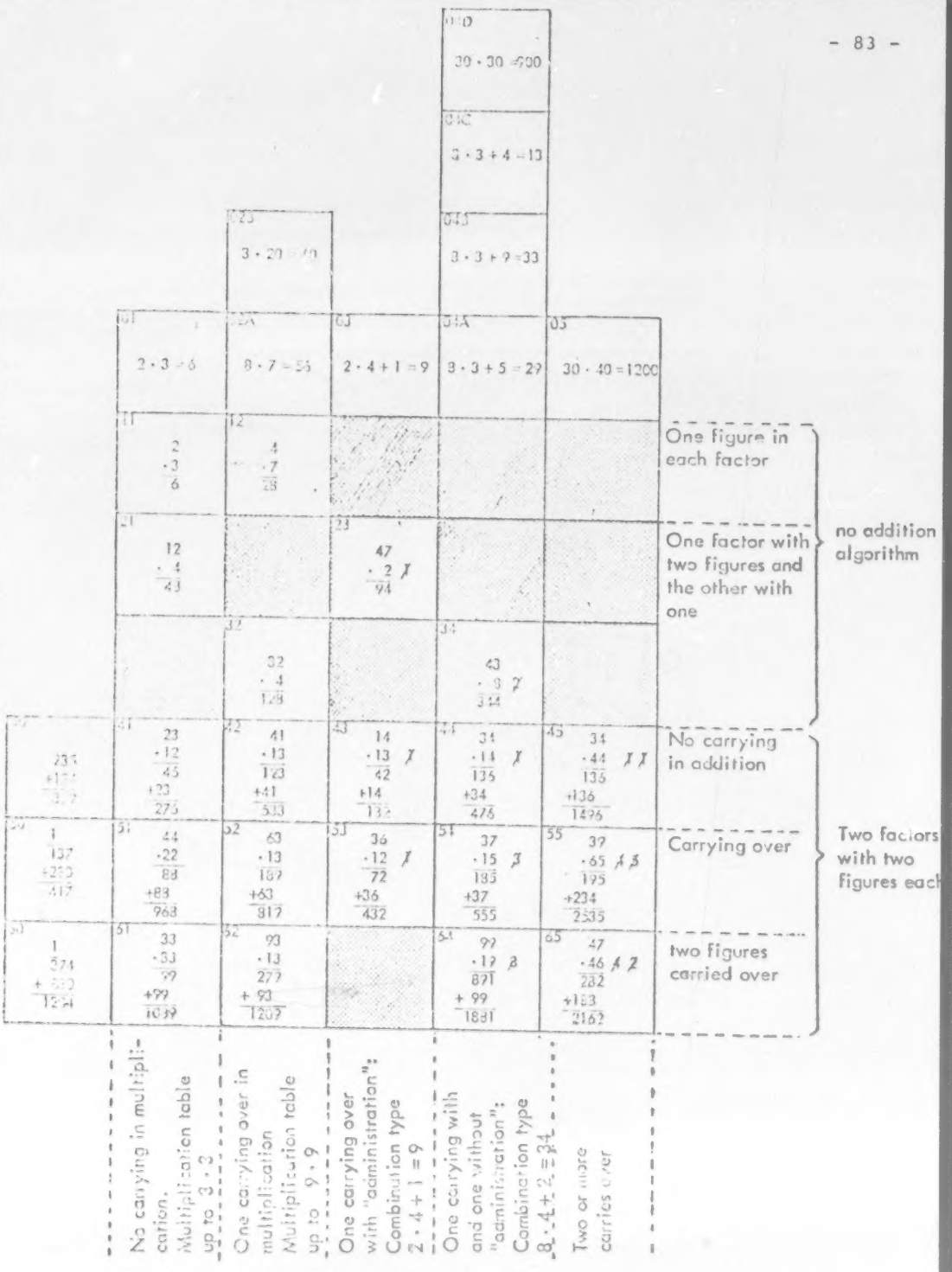

30 · 30 = 900
2 · 3 + 4 = 10
3 · 3 + 9 = 33
3 · 20 = 60
2 · 3 = 6
8 · 7 = 56
2 · 4 + 1 = 9
3 · 3 + 5 = 29
30 · 40 = 1200
One figure in each factor
One factor with two figures and the other with one
no addition algorithm
No carrying in addition
Carrying over
two figures carried over
Two factors with two figures each
No carrying in multiplication. Multiplication table up to 3 · 3
One carrying over in multiplication Multiplication table up to 9 · 9
One carrying over with "administration": Combination type 2 · 4 + 1 = 9
One carrying with and one without "administration": Combination type 8 · 4 + 2 = 34
Two or more carries over

Fig. 3. An example of the matrices: Multiplication.

- The pupils who cannot solve the items in M23 and not even the items in MO3 need extra help. They can get some extra teaching (remedial teaching) before the class starts with carrying. After that help they can perhaps follow the class instruction.
- The pupils who can solve the items in MO2 and M12 but not the items in MO3 can also work like this: The teacher separate items of type M43, M44 etc from items of type M41 and M42. The slower pupils can then solve items only of the later type. At the same time the pupils get some extra minutes' instruction every lesson, so that they further on can solve the items in MO3, M23 and then M43.
- Etc.

The very brief examples above show how the matrices can be used both as basis for diagnosis and as a planning or strategy instrument. In the concrete teaching situation the teacher is given a basis for his decision of the following questions:

- What previous knowledge is lacking?
- What bearing does this have on the pupil's instruction?

On the strength of this basis the teacher or teaching team can decide:

- Which pupils require extra teaching before an item begins?
- How should the content of an item be selected and what priority should it be given for different pupils or groups of pupils?
- How should the pupils be grouped in terms of their previous knowledge in order to achieve the best possible individualization of instruction?
- The best use to make of the remedial teacher and the teaching team.

In order for a teacher to be able to make full use of the diagnostic battery, each pupil's knowledge must be entered on an index card resembling the matrix. The teacher can then

ascertain what each individual pupil has been writing in previously and what new items he is free to choose between (cf IPI 1969).

5. DESCRIPTIONS OF TEACHING

A preliminary instrument and appurtenant diagnostic battery have been completed during the period 1973-1974 (Johansson and Kilborn 1974). During the spring of 1974 the preliminary diagnoses were administered in a large number of classes and in all nine grades in the comprehensive school. After a first revision of the material on basis of this empirical study the entire material is now published by the National Board of Education (Johansson and Kilborn 1975).

In a number of classes from grade 2 to grade 6 various empirical studies of teaching have been carried out. Briefly these studies have followed the following strategy:

- First the textbooks have been classified in relation to the matrices.
- Secondly the pupils were diagnosed.
- Thirdly the lessons have been taperecorded, typewritten and classified.
- Every utterance and every written instruction has been classified in relation to the matrices.

This material then gives the basis for the theoretical analysis. As our aim is here just to discuss the starting points and the design of the study, we will limit the presentation only to our illustrations.

The basic point in this strategy is that the data here reported on gives the following descriptions:

For every teacher move and/or pupil move in the teaching process we can determine how many pupils are able to understand and what pupils can or cannot understand. To

every decision, then, we can determine the basis for the decision. We have in our data one basis and through interviews with the teachers after each session we have given the teacher's rationale for the decision. Taking these descriptions of the process and the comparisions of the expressed intentions by the participants we have a solid basis for explaining the structure of the process in terms of constraints. These analyses are then made from various perspectives determined on what aspect of the communication that is chosen. Basically the analysis will be done in terms of the matrices. But within the research group these analyses will also be elaborated concerning the linguistic aspects of the communication (cf Lundgren 1973), the rules and roles of teaching (Gustafsson 1975), the time dimension (Torper 1975) and the social reproduction pattern (Callewaert and Nilsson 1973).

6. ONE PUPIL: AN ILLUSTRATION OF THE DESCRIPTIONS

Just to illustrate the pattern of thinking we will briefly present the data for one pupil during one lesson. This pupil (P12) has on the diagnostic test the following "picture":

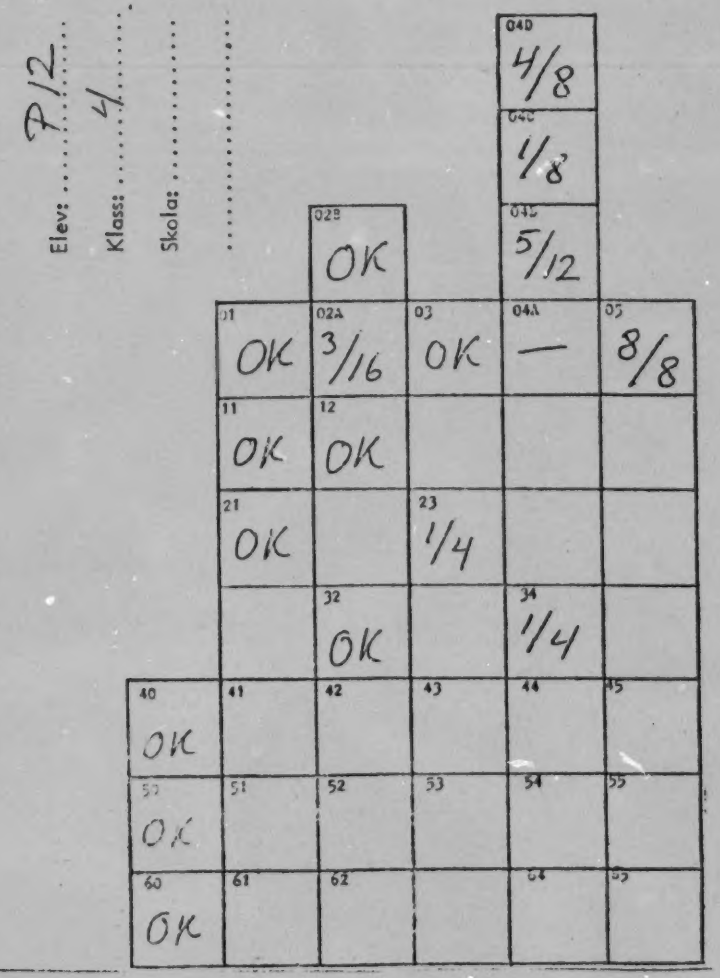


Fig. 4. The diagnostic "picture" for P12.

This pupil's interaction during the lesson is the following. (Teacher indicated with T. The time for each interaction indicated to the left and the matrix classification on the right.)

2.40	T (from the desk)	How much is five times five?	MO2A
		P12?	
2.45	P12	Twenty-five	
3.35	T (from the desk)	Seven times nine, that's difficult, seven times nine, ...	MO2A
		P12	
	P12	Seventy-two	
	T	Seven times nine, what can that be?	MO2A
	P12	Sixty-three	
3.45	T	Yes.	
31.00	T (at the desk of P12)	Ha, put down now.	M53 16
		It's right yes.	.26 / 96
		Two times six, it is?	(MO2A)
	P12	Two times six it is twelve. So.	
	T	No, where do you put the number one now?	(M53)
	P12	There. Two times one is two plus one is three.	(MO3)
31.20	T	Hm. Is it right now? That's it.	
32.15	P12	... so difficult ...	M44 17
	T (at the desk of P12)	Hm. It's probably right.	.27 / 119
		But look, here have you done wrong too.	(MO2A)
		Two times seven it is?	
	P12	It's fourteen.	
	T	Hm. Where do you put the number there then?	(M44)

		That one you put in memory, yes?	(M44)
		But you have one more to work with.	(M44)
	P12	Hm.	
	T	And then you take. Two times one is	M44 MO1
	P12	Two	
	T	Plus that one	(MO3)
	P12	Three	
33.00	T	Where do you write that one?	(M44)
		There, yes	

	T (at the desk of P22)	You sit and count on your own place and leave P22 alone	
39.45	P12	Hm	

45.40	T (with P12)	What is seven times five?	M44 35 (MO2A) .17
	P12	Thirty-five.	
	T	No, seven times five is ...	(MO2A)
		Yes, thirty-five, sorry. Thirty-five.	
		What have you written then?	
	P12	Thirty.	
46.00	T	Hm. Change that. So yes. Of course.	
		Five, zero. That's right.	

57,30	T (with P12)	Sit properly, you are a real chatterbox to-day. Now you sit.	T apprehends 9 as ↓ 19
	P12	Look here.	
	T	Sit properly I say. P22 sit properly now. It was awful with you.	M53 .22
		Look there.	
		Two times four what's that?	(MO1)
	P12	It's eighteen.	
	T	Two times four is?	(MO1)
	P12	Oh yes. Two times, two times four	
	T	Or what does that represent?	
	P12	Eight, nine.	

	T	What a number is that?	
		You maybe write in that way.	
		That should represent nineteen, yes.	
		Two times nine is	(M02A)
	P12	Eighteen.	
	T	Hm, one times two is	(M01)
	P12	Two.	
	T	Shall we see, plus one	(M03)
	P12	Three.	
	T	Two times nine is	(M02A)
	P12	Eighteen.	
	T	The number eight there and the number one in memory, yes?	(M53)
	P12	I had done that wrong.	
58.25	T	Yes. Rub it out and remake it.	

- -

The teacher and P12 interact seven times. The first time at 2.40 minutes after the start of the lesson. The question from the teacher is then classified as M02A. Etc.

If we compare the diagnostic "picture" (fig.4) with the items in the textbook and the interactions during the lesson we find at the first glance a puzzling pattern.

Obviously the pupil according to the diagnostic picture cannot solve the items in the textbook and does not understand the communication in the classroom around these items.

After the lesson we have classified the items P12 solved in this textbook during the lesson. We will here have a new "picture" of his knowledge:

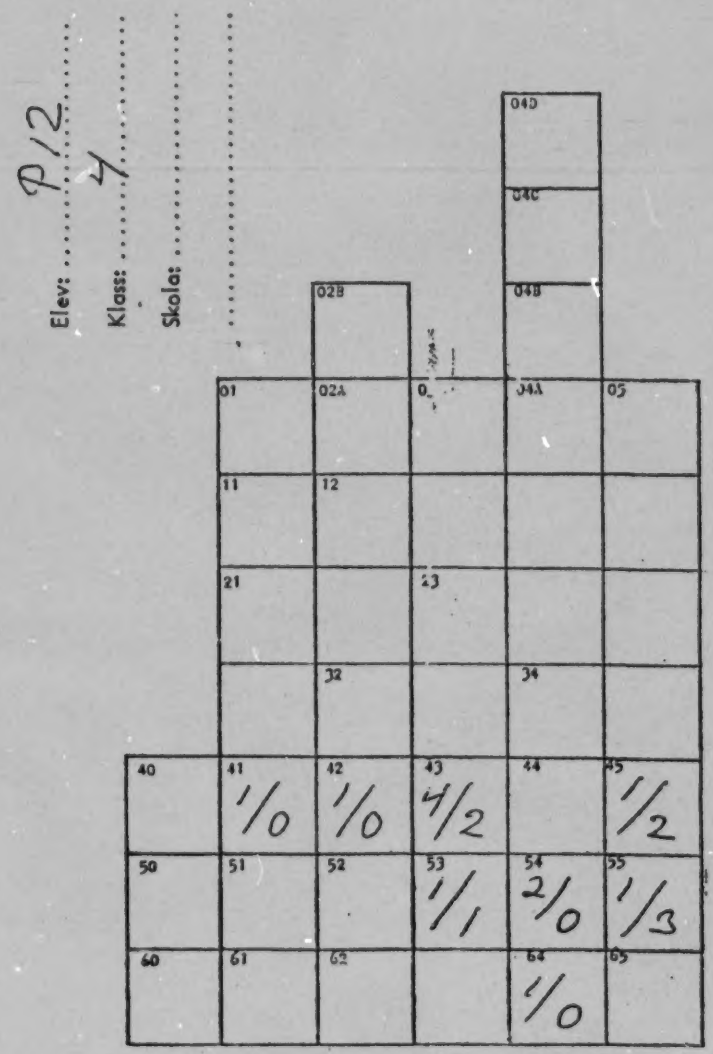


Fig. 5. The number of items solved by pupil P12 during lesson 2.

Comparing this "picture" with the diagnostic "picture" we find a great difference. According to the exercise book the pupil has in fact solved items that at the start of the lesson was quite impossible for him. This lesson has according to the difference between the diagnostic "picture" and the exercise book "picture" made a remarkable difference in learning.

In fact by following the interaction, we can state that P12 has learned nothing (in relation to the curriculum). His learning has instead been of a much more personal type. The teacher has in fact solved the items for P12, and what P12 possibly has learnt is, that he has learning difficulties in arithmetic. He has also learnt, that asking the teacher for help is a literary question. The teacher solves the problem and will not support the pupil's problem solving As time goes the pupil articulates a form of criticism interpreted by the teacher as a discipline problem.

This illustration shows the power of the approach. The description points in details on how the differentiation in the classgroup is formed. Now, to explain this, it is obvious that an explanation in psychological terms, i.e. in terms of teacher directness or indirectness (cf Flanders 1973) or student learning will just skin the top of this complexity.

The explanation must be formed in two steps: First: How do the constraints operate. This means to determine how this teaching pattern is formed by the frames given for the teaching. The number of pupils in the class, the composition of the class in respect to the pupils' prerequisites and experiences, the time at disposal etc. Within this frame the teacher forms a strategy that functions on a behavior level as well as possible, i.e. keeps the pace of teaching and minimizes discipline problems. But the choice of strategy is also a question of teaching methodology. Within the constraints there exist degrees of freedom in choice of strategy.

Second: How much could the teaching change if this description was available to the teacher? The next step is then to find the ultimate constraints, i.e. what is possible within the frames given.

Both these steps in analysing are two faces of the same analysis. The strategy is here of a dialectical kind. The changing of the curriculum, must be done through finding the constraints, describing the possibilities within the constraints and change the constraints for elaborating the space for change.

Ultimately the problem from the researchers' point of view is to explain the constraints and the possible strategies of the constraints theoretically. The changing of the constraints is curriculum questions on a political level. But only through research, this political question can be raised.

What is here discussed is thereby not only a theory for explaining teaching processes but also at the same time another perspective in looking on educational research and educational policy (cf Lundgren 1975).

REFERENCES

Aiken L.R. : Language factors in learning mathematics. In: Review of Educational Research, 1972, 3, 359-385

Bellack A.A. et al : The language of the classroom. New York: Teachers' College Press, Columbia University, 1966

Dahllöf U. : Ability grouping, content validity and curriculum process analysis. New York: Teachers College Press, Columbia University, 1971

Dunkin M. Biddle B.J. : The study of teaching. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975

Flanders N.A. : Analyzing teaching behavior. Reading Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1970

Gustafsson C. : Process analyses of teaching - a theoretical survey and the outlines of an empirical study. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1975:3

IPI : Aiding IPI. Philadelphia, 1961

Johansson B. Kilborn W. : Ett diagnosinstrument för arithmetikundervisning. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1974:8

Johansson B. Kilborn W. : Aritmetikdiagnoser. (Ingaende komponenter: Handledning, diagnoshäften, arbetsblad och registreringsblanketter.) Stockholm: Liber Läromedel/Utbildningsförlaget. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1975:10

Kilborn W. Lundgren U.P. : En presentation av ett froskningsprojekt rörande svagpresterande elevers undervisning i matematik. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1973:1. (A presentation of a researching project concerning low activities in mathematics.)

Kilborn W. Lundgren U.P. : Försök med friare resursanvändning. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1974:2. (Experiments with free resource allocation.)

Kilborn W. Lundgren U.P. : Skolans inre arbete. Stockholm: PAN/Norstedts, 1974. (The inner work of the school.)

Kilborn W. Lundgren U.P. : SAS-medlen. En argärdsvärdering i fem kommuner. Stockholm: Skolöverstyrelsen. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1975:1975:11. (SAS-resources. A measure evaluation in five communities.)

Lundgren U.P. : Frame factors and the teaching process. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1972

Lundgren U.P. : Pedagogical frames and the teaching process. Göteborg: Reports from the Institute of Education. University of Göteborg, 1973

Lundgren U.P. : Pedagogical roles in the classroom. In Eggleston (ed): Contemporary Research in the Sociology of Teaching. London: Methuen, 1974

Lundgren U.P. : Bildungsforschung - Bildungspolitik. Anmerkungen zu strategischen Problemen der Verbindung von Curriculumunterrichtung und Bildungsforschung. Kiel: IPN, 1975

Nilsson B.
Calleweart S. : Skolan som socialt system. Lund: Sociologiska institutionen, Lunds Universitet. (The school as a social system.) 1973

Shavelson R.J. : The theory of directed graphs: Some applications to research on teaching. Stanford: Stanford Center for Research and Development in Teaching, 1973

Smith B.O.
Meux M.O. : A study of the logic of teaching. Urbana III.: College of Education. University of Illinois, 1961

SOU : Skolans arbetsmiljö. Stockholm: Utbildningsdepartementet. (The working conditions of the school.) 1974:53

Torper U. : Pedagogisk forskning kring tidsallokering. Göteborg: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet. Forskningsrapport fran MAP-gruppen 1975:12. (Education research concerning time allocation.)

Wright E.M.J.
Proctor V.H. : Systematic observation of verbal interaction as method of comparing mathematics lessons. St.Louis: Department of Mathematics. Washington University, 1961

QUELLEN UND BEDINGUNGEN DER ENTSTEHUNG DES SELBSTKONZEPTES

Jens Holger Lorenz

1. ALLGEMEINES

Das Dilemma des Konstruktes "Selbstkonzept" findet in der Literatur durch ungezählte Definitionen, methodologische Unterschiede seiner Erhebung und seines ungeklärten prognostischen Wertes seinen Ausdruck. "These problems have occasioned many scholars to doubt or be uncertain about the theoretical efficacy of self-concept as a theoretical construct" (Bilby et al., 1972, 5o5), und DIGGORY (1966, 62) vermerkt:"In 1961 Ruth Wylie published a critical review of the research literature on the 'self-concept'. ... The review included over four hundred titles and Wylie's critical acumen has performed a momentous service in revealing the utter bankruptcy of it all."(1) Unklarheit besteht darüber, ob SK das Selbst als Objekt oder als Prozeß bezeichnet, ob man SK ansieht als "ganzheitliches" Phänomen ("unitary" phenomenon) oder schlicht als Kategorie linguistischen Rollenverhaltens (s.Bilby et al., 1972).

Im folgenden soll kurz der Ansatz von Bilby skizziert werden, um dann wesentliche Grundlagen und Aussagen unter dem Aspekt anderer Literatur und unterschiedlicher theoretischer Ausgangspunkte zu beleuchten.

1.1 Bilbys Modell des SK

BILBY et al. (1972) legen ihrem Modell zehn Postulate und Aussagen zugrunde, die sie zu einem System der Quellen und Funktionen des SK zusammenfassen. Vorausschickend und ein-

---

Anmerkung: (1) Zum gleichen Ergebnis kommen LYNCH/CHAVES (1975) bei einer Gegenüberstellung der z.Z. verwandten SK-Tests.

schränkend sei bemerkt, daß dieses Modell entwickelt wurde, um die Unterrichts-Erziehungspläne von Schülern wirksam vorauszusagen. "In this study we are interested in a model which will lead to the efficient prediction of students' educational plans. This paper offers a strategy for predicting the behaviors and plans for behaviors which individuals make." Diese Einschränkung ist insofern bedeutsam, als prinzipiell in der Literatur das Konstrukt "SK" gefaßt wird im Hinblick auf das Ziel, das man vor Augen hat, im Hinblick auf die Voraussage, die man zu treffen wünscht.

1.1.1 Selbst wird definiert als Vergegenwärtigung oder Bewußtsein, das den Menschen befähigt, sein eigenes Verhalten oder seine Existenz in Beziehung zu einer Umgebung zu sehen. Selbstkonzept ist Ausdruck dieses Bewußtseins.

1.1.2 Selbstkonzept als Variable - SK wird als variabel angesehen (in der Zeit), als Kategorie, mit der bestimmte momentane Sprechakte des Individuums gruppiert werden. SK wird somit abgegrenzt von statischen Eigenschaften des Organismus.

1.1.3 Rollenspezifisches SK bedeutet die Aufsplitterung des allgemeinen SK in Unterbereiche, die möglicherweise selbst noch Verfeinerungen zulassen. So könnte z.B. das allgemeine SK eines 13-jährigen differenziert werden bzgl. seiner Rolle als Schüler, als Sohn, als Pfadfinder etc., die Rolle des Schülers weiterhin bzgl. einzelner Fächer. Allerdings wird man kaum erwarten dürfen, so feine Ausdifferenzierungen des vollen spezifischen SK an einzelnen Äußerungen des Individuums ausmachen zu können, vielmehr konstituieren sie eine Selbstkonzept-Struktur (self-concept-structure).

1.1.4 Planung ist integraler Bestandteil freiwilligen und operanten Verhaltens. Es wird unterstellt, daß Pläne für das Selbst Bedingungen für das Selbst in zukünftigen

Situationen bestimmen.

1.1.5 Selbstkonzept von Fähigkeiten (self-conceptions of ability) (SCA) bezieht sich auf die Charakterisierung oder Einschätzung eines Individuums bzgl. seiner Fähigkeit, Rollenaufgaben auszuführen. Es wird theoretisch als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung angesehen, Pläne zur Übernahme von Rollenaktivitäten aufzustellen.

1.1.6 SK des instrumentellen Wertes der Rolle (self-conceptions of the instrumental value of the role) (SC_{RC}) kennzeichnet die Einschätzung des Individuums bzgl. des Aufwands und der Entschädigung, die mit einer Rollenübernahme verbunden sind. Die fragliche Rolle wird z.T. angesehen als Mittel zu gewissen Konsequenzen.

1.1.7 SK des intrinsischen Wertes der Rolle (self-conceptions of the intrinsic value of the role) (SC_{INF}) bezeichnet die Einschätzung des Selbstwertes in einer Rolle. Hier wird die Rolle selbst als Ende angesehen.

1.1.8 SCA, SC_{RC} und SC_{INF} werden analytisch und begrifflich zu jedem Zeitpunkt als drei Kategorien des SK unterschieden. Über ihren additiven Einfluß hinaus interagieren sie und haben einen eindeutigen Effekt.

1.1.9 Beobachtung (monitoring) der anderen und des Selbst durch das Individuum ist das wichtigste prozessuale Konstrukt für analytische Zwecke. Beobachtung (monitoring) wird Wahrnehmung (perception) vorgezogen, das eher statische und asymmetrische Prozesse bezeichnet als aktive und eine reziproke Beziehung zwischen Individuum und Umgebung.

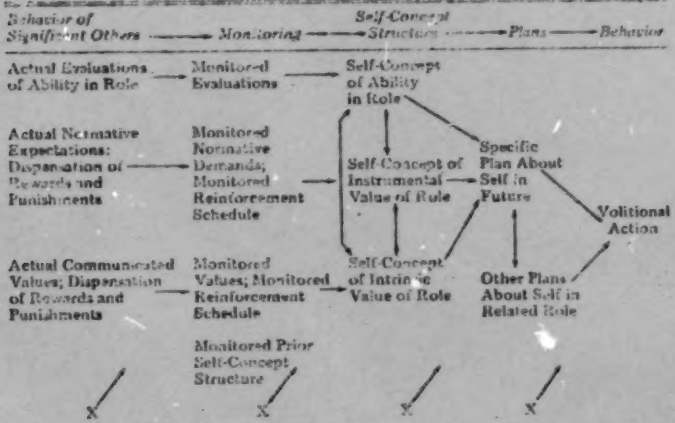
1.1.10 In Anlehnung an vorangehende empirische und theoretische Arbeiten werden Eltern, Lehrer und die peer group als Bezugspersonen (significant others) für das schulische Leben der Schüler angenommen, d.h. sie beeinflussen sein SK.

Die Wirkungsweise dieses Modells wird in der folgenden Figur

veranschaulicht (entnommen Bilby et al., 1972, 508).

FIGURE 1

Schematic Representation of the Model of Sources and Functions of Self Conceptions



(where X represents other sets of unspecified variables which contribute to human action, e.g., hereditary factors, nutritional variables, environmental conditions, and so on.

So glatt sich dieser Ansatz auch zu einem System fügt, so muß dennoch wiederholt werden, daß er im Hinblick auf einen bestimmten Zweck konstruiert wurde, nämlich Selbstkonzept als Prädiktor zukünftigen Entscheidungsverhaltens über den schulischen Werdegang aufzufassen. Daher wird man nicht erwarten können, explizite Ausformulierung des Entstehens des Teiles des SK vorzufinden, das über Schule und in ihr sich abspielende Interaktionen vermittelt wird. Es gibt aber Startpunkte, von denen ausgehend gewisse Aspekte genauer auf ihre Relevanz zum unterrichtlichen Geschehen hin geprüft werden können.

1.2 Selbstkonzept und Schulleistung

Da der Zusammenhang zwischen schulischer Leistung (SL) und Selbstkonzept schon an anderer Stelle diskutiert wurde (s.Lorenz; Selbstkonzept und Selbsteinschätzung), sei

hier nur noch zusammenfassend darauf eingegangen. Korrelationen zwischen SK und SL bestehen unbestritten und liegen zwischen r = .20 und r = .60. Allerdings ist die jeweilige Höhe der Korrelation abhängig vom Meßverfahren, speziell ob es allgemeines SK (general self-concept) oder fachspezifisches SK (academic self-concept) mißt (was auch plausibel ist). Das Krux dieser Analysen ist, daß zwar ein Zusammenhang konstatiert werden kann, damit aber noch keine Kausalität sich ableitet. Diese entspringt erst einer umfassenden Theorie, auf deren Hintergrund diese Ergebnisse interpretiert werden. Daher steht es jedem Forscher frei, den Kausalzusammenhang in der einen wie in der anderen Richtung zu deuten, Rückhalt findet er immer in einer Theorie, derer es nicht mangelt. Diesem Dilemma zu entweichen, bieten sich zwei Wege an.

- Man benutzt Methoden der statistischen Analyse, die eine Kausalität zu interpretieren nahelegen. CALSYN (1973) benutzte die cross-legged panel analysis, die als dritte Variable die Zeit mit einbezieht, und konnte so SL als Voraussetzung des SK nachweisen.
- Unterschiedliche Modelle werden auf ihren Aussagenwert und ihre prognostische Kraft an Langzeitstudien geprüft. So kommt KIFER (1975) zu einem mit Calsyn übereinstimmenden Ergebnis:"The results of the study provide strong evidence for a model which emphasizes the influence of successful academic achievement on personality characteristics," (Kifer, 1975, 191).

Zwar wird hiermit eine Kausalität postuliert, die neben ihrer Plausibilität auch noch statistisch abgesichert zu sein scheint, doch bleiben wesentliche Aspekte des Entstehens von SK unberücksichtigt. Der Prozeßcharakter des SK wird ernsthaft nicht mehr negiert, doch fehlen speziellere Untersuchungen, die einzelne Abschnitte, Wechselwirkungen u.ä. zu erhellen vermögen.

2. SPEZIELLE ASPEKTE

Im folgenden soll daher der Versuch unternommen werden, einzelne Teile des komplexen Geschehens auszugliedern und dazugehörige Literatur aufzuarbeiten. Da die jeweiligen Untersuchungen auf Stücke vorhandener Theorie sich stützen, erscheint es unerläßlich, zumindest Grundlagen dieser Modelle zu thematisieren.

2.1 Problemstellung

Da die Ausbildung des (zumindest fachspezifischen) SK implizit in jedem Unterrichtsgeschehen mitvermittelt wird, ist es für die pädagogische Forschung unabdingbar, Anleihen aus den diesbezüglich vorhandenen sozialpsychologischen Theorien aufzunehmen, um dann ihrerseits Handlungsmodelle zur Unterrichtsgestaltung zu konstruieren. Dabei müssen die Antwortvorschläge zu folgenden Fragen aufgearbeitet und in eine pädagogische Theorie integriert werden:

- Was sind die determinierenden Faktoren des SK bzw. der Veränderung des SK ?
- Wie sieht die Selbststruktur aus und was bedingt ihre Stabilität und ihre Änderung ?
- Was sind die Konsequenzen von verschiedenen Arten des SK ?
  (s.Webster/Sobieszek, 1974).

2.2 Entwicklungspsychologie

In der Entwicklungspsychologie sind die Wurzeln des einen Teils der Ideen zu suchen, die heute maßgeblich soziologische und psychologische Betrachtungen über das Bewußtsein beeinflussen, die das Individuum von sich selbst hat. Zurückgehend auf Freud wird vornehmlich von Psychologen, Psychiatern und Psychoanalytikern angenommen, das "Selbst" - was hier der Menge persönlicher Charakteristiken bzw. der "Persönlichkeit" des Individuums entspricht - entwik-

kele sich nach Gesetzen ähnlich dem biologischen Wachstum. Das Individuum entwickele sich mit eindeutigen (Charakter-)Zügen, Gewohnheiten, Werten und Einstellungen, die bei der Geburt festgelegt oder zumindest von den bei der Geburt vorhandenen maßgeblich beeinflußt seien (s.Webster/Sobieszek, 1974, 1f).

Da allerdings dieser Ausgangspunkt für die pädagogische Diskussion ohne weitreichende Folgen bleiben dürfte, sei an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen, sondern auf die einschlägige Literatur verwiesen.

2.3 Sozialpsychologie

Ausgehend von dem Gedanken, daß menschliche Existenz nicht denkbar ist ohne Kontakt zu anderen und diese anderen rückwirkend sowohl menschliche Entscheidungen beeinflussen als auch "Persönlichkeit" mit ausbilden, entwickelte sich das Modell des "sozialen Selbst" (social self). Anhänger dieser Form (oft "environmentalists" genannt) sehen im extremsten Fall die Ausbildung einer "eigenständigen Persönlichkeit", eines "Selbst" ohne Relation zu anderen als unmöglich an.

2.3.1 Behaviorismus

Eine extreme Ausformulierung erfuhr die Theorie des sozialen Selbst im Modell des Behaviorismus. Das Individuum ist hier nicht mehr und nicht weniger, als was es durch Umwelt (andere) erfahren hat. Der Behaviorismus setzt sich somit entschieden gegen die Annahme psychoanalytischer Theorien mit (vorgeburtlichen) Verhaltenspredispositionen und "Instinkten" ab. Das Selbst kann hier vielmehr untersucht und analysiert werden, als ob es ausschließlich durch externale Faktoren beeinflußt sei. Damit wird das Individuum zum Objekt seiner Umwelt, ist nicht mehr Subjekt seiner Handlungen, da diese wiederum verstanden werden als Reaktionen auf äußere Stimuli.

2.3.2 Sozialer Interaktionismus

Gegen die benavioristische Vorstellung vom determinierten Individuum als reagierendem Organismus hebt sich das Modell des sozialen Interaktionismus ab. Es betrachtet die Relation Umwelt - Individuum zwar auch als zentralen Faktor, doch ist das Individuum mit Selbstreflektiertheit (self-awareness) und Selbstbewußtsein (self-consciousness) versehen. Damit ist die einseitige Betrachtungsweise Umwelt - Individuum als Agens - Reagens aufgehoben zugunsten einer (gleichgewichtigen) Interaktion. Einstellungen, Motive, Triebkräfte, Meinungen etc. werden erklärt über vorausgegangene Interaktionen mit anderen, derer sich das Individuum aber immer bewußt ist. (Allerdings trifft m.W. nach der Interaktionsismus keine Aussagen über die Entstehung dieses Bewußtseins.) Diese Interaktionen spielen sich nicht nur auf der Ebene direkt (physikalisch) meßbarer Handlungen ab, sehr viel eher auf symbolischer (durch z.B. Sprache vermittelter), deren Untersuchung interpretativen Verfahren vorbehalten bleibt.

Der soziale Interaktionismus nimmt seinen Ausgang bei COOLEY (1964). In seiner "Spiegel"-Theorie ("looking-glass" theory) wird die Entstehung des SK interpretiert durch drei grundlegende Hypothesen:

- Das Individuum erhält ein Bild von sich durch die mit ihm interagierenden anderen, durch deren Äußerungen, Gedanken u.ä., gebrochen wie durch einen Spiegel seine Erscheinung, Handlungen, Werte, Ziele etc., kurz sein "Selbst" reflektiert wird.
- Die anderen wiederum unterliegen einer Einschätzung und Wertung durch das Individuum, so daß nicht alle "Spiegelbilder" gleich gewichtet werden.
- Durch die Interaktion formt das Individuum ein Bild vom jeweiligen anderen, einem "internalisierten anderen" ("internalized other"). Objekte der Untersuchung müßten demnach nicht (nur) Individuum und andere als

differenzierbare Personen der Gesellschaft sein, sondern vielmehr die Vorstellungen, die das Individuum von den anderen ausgeformt hat.
MEAD (1934) modifizierte Cooley's "Spiegel-Theorie" dahingehend, daß er den Begriff des "verallgemeinerten anderen" ("generalized other") einführte. Mead charakterisiert diesen "verallgemeinerten anderen" folgendermaßen:

> "The organized community or social group which gives to the individual his unity of self may be called "the generalized other". The attitude of the generalized other is the attitude of the whole community" (Mead 1934, 154).

In dreierlei Hinsicht wird die Cooleysche "Spiegel-Theorie" somit erweitert:

- Der soziale Kontext der Interaktion wird betont. Das Individuum denkt in Kategorien und bezieht Meinungen über sich aus der speziellen sozialen Gruppe. Es bezieht Standards aus der ihm dargebotenen Fülle der Variationen in dieser Gruppe.
- Daraus ergibt sich notwendig die Idee der Rollenspezifität. Das Individuum interagiert mit verschiedenen sozialen Gruppen, ihm werden unterschiedliche Rollen zugewiesen. Es bildet verschiedene "Selbsts" und Selbstbetrachtungen aus.
- Das Selbst besitzt eine "semipermanente" Struktur ("semipermanent" structure), d.h. es ändert sich nicht permanent, nicht sofort und vollständig mit jedem Wechsel seiner Umgebung, obwohl es sensibel gegen Veränderungen ist. Damit ist zukünftiges Verhalten nicht direkt ableitbar aus vorausgegangener Erfahrung.

SULLIVAN (1947) spezifizierte dieses Modell und erweiterte es um den Begriff des "signifikanten anderen" ("significant other"). Der bezüglich des Individuums "signifikante andere" ist die Person, deren Einstellungen und Handlungen für das Individuum relevant sind bzw. so von ihm eingeschätzt

werden. "Signifikanter anderer" zu sein, ist keine Eigenschaft, die einer Person zukommt und einer anderen nicht; sie wird vielmehr definiert über das betreffende Individuum, das jene als solche akzeptiert, sowie über den jeweiligen sozialen Kontext, in dem (momentan) interagiert wird.

2.4 Begründung

Es ist zu vermuten, daß das letzte Modell sich für pädagogisches Geschehen als am brauchbarsten erweist. Daher sollte in der Untersuchung über unterrichtliche Prozesse dieser Aspekt besondere Berücksichtigung finden und die Hypothesen und Einsichten, die in der Theorie des Interaktionismus ausformuliert sind, erhöhte Aufmerksamkeit verdienen. Denn

- Unterricht ist sinnvoll nur interpretierbar als Interaktion zwischen Individuen (Lehrer-Schüler, Schüler-Schüler).
- dem Lehrer kommt eine exponierte Stellung zu, er ist der Experte (zumindest für einen bestimmten, unterrichtsrelevanten Aspekt: den Inhalt) und somit der "signifikant andere".
- die Beurteilung durch den Lehrer hat neben externen (formalen) Werten (z.B. Noten) massive Bedeutung für den Schüler in der Einschätzung seiner eigenen Leistung (als Rückkopplung) und in der Kausalattribuierung für Erfolg bzw. Mißerfolg.

Inwieweit der Interaktionismus diese Punkte abzudecken vermag und inwieweit verbleibende Lücken durch andere Modelle aufgefüllt werden können, soll im folgenden skizziert werden.

3. MODELL DES INTERAKTIONISMUS

Die Theorie des sozialen Selbst umspannt das SK als komplexes Ganzes, wie oben ausgeführt. Versuche, diese Ideen zu operationalisieren, werden häufig präziser in ihren Voraussagen und liefern nachprüfbare Ergebnisse (wenn Randbedingungen kontrolliert werden können). Die Forschung richtet ihr Interesse auf Aspekte der Beurteilung der einzelnen sowohl durch andere als auch sich selbst. "The most interesting features of self-concept, ..., are the evaluative aspects" (Webster/Sobieszek 1974, 15).

Damit wird SK untergliedert in den Bereich der Selbstbeurteilung (oder Selbstbewertung) (self-evaluation) und in einen Bereich, in dem religiöse, metaphysische etc. Ansichten und Betrachtungen eingehen. Es kann allerdings konstatiert werden, daß in der Literatur diese Trennung, Selbstbeurteilung als Teilbereich des SK, nicht vollständig vollzogen wird, vielmehr werden beide synonym verwandt. Die (sprachliche) Verfeinerung bietet sich aber an, da hiermit das Augenmerk auf den evaluativen Teil des SK gelenkt ist und Operationalisierungen möglich werden.

Die Ergebnisse einzelner Untersuchungen seien kurz aufgeführt (s.Webster/Sobieszek, 1974):

- Die Selbstbeurteilung des Individuums ist eng verknüpft mit der tatsächlichen Einschätzung durch andere Mitglieder der Gruppe.
- Die Selbstbeurteilung des Individuums ist eng verknüpft mit der wahrgenommenen Einschätzung durch andere Mitglieder der Gruppe, und diese Korrelation ist höher als mit der tatsächlichen Einschätzung.
- Die Selbsteinschätzung des Individuums ist eng verknüpft mit der wahrgenommenen Einschätzung durch "die meisten anderen".

"Essentially, the results show that self-conception and generalized other are usually given the identical rating" (Miyamoto/Dornbusch 1956, s.auch Moore 1964, Couch 1958).

Ausgehend von der Tatsache, daß obige Punkte nicht durchgängig bei jedem Individuum feststellbar waren, wurden

weitere zur Erklärung dienende Faktoren untersucht:

- Inkonsistente Ergebnisse lassen sich (teilweise) zurückführen auf die Extensität der Interaktion.

Das bedeutet, Individuen mit mehreren alternativen Bezugsgruppen zeigen sich resistenter (kritischer?) gegenüber der Beurteilung durch nur eine Gruppe, (Reeder et al. 1960).

Aufschluß über Bildung und Änderungen in der Selbstbeurteilung erhofft man sich über die Manipulation der dem Individuum zugeführten Information bzgl. der Beurteilung durch die Mitglieder der Gruppe.

Dabei ergab sich, daß der Erfolg der versuchten Manipulation von zwei Faktoren abhing:

- Die Manipulation war umso effektiver, je stärker die Attraktion der Gruppe auf das Individuum war.

- Die Manipulation war umso schwächer, je schärfer das Individuum die tatsächliche Beurteilung durch die Gruppe einschätzen konnte.

Daraus läßt sich als Schlußfolgerung ableiten, daß Unschärfe in der Wahrnehmung der Beurteilung durch andere Unsicherheit und Instabilität in der Selbstbeurteilung nach sich zieht.

- Manipulation läßt sich sowohl in positiver wie in negativer Richtung durchführen, (Israel 1956; Videbeck 1960; Maehr et al. 1962; Haas/Maehr 1965).

Auf den damit zusammenhängenden "Mythos" der Maximierung des Selbstkonzeptes,d.h. Mißdeutung und Fehlinterpretation der Beurteilung durch andere in Richtung auf "Selbstbestätigung", erhöhtes SK, wird später eingegangen.

- Die Häufigkeit der (Fremd-)Beurteilungen korreliert mit der Höhe der Änderung der Selbstbeurteilung.

- Die Änderung der Selbstbeurteilung in einem (fachspezifischen) Bereich überträgt sich auf andere Bereiche.

Das bestätigt das Modell eines umfassenden SK, bestehend aus spezifischen, aufgabengebundenen Selbstbeurteilungen, die allerdings nicht vollständig zu isolieren sind, viel-

mehr miteinander "interagieren".

- Die Änderung der Selbstbeurteilung korreliert mit der Dauer der Manipulation.

- Änderung der Selbstbeurteilung tritt häufiger auf in Bereichen mit hohem Konsensusbedürfnis als in Bereichen mit niedrigem.

Auf Interpretationen dieser beiden Punkte braucht nicht eingegangen zu werden, sie liegen auf der Hand.

- Die Beurteilung durch einen (vom Individuum akzeptierten) "Experten" beeinflußt die Selbstbeurteilung mehr als die Beurteilung durch andere (Jones 1966).

- Ein Individuum mit (induzierter) niedriger Selbstbeurteilung, beurteilt andere negativ, wenn es von jenen positiv beurteilt wird; es beurteilt sie positiv, wenn es von ihnen negativ beurteilt wird. (Jones/Ratner 1967, Jones/Pines 1968, Jones 1968).

Untersuchungen über Beiträge in (Diskussions-)Gruppen, die gemeinsam Lösungen von Problemen erarbeiteten, ergab:

- Die Wahrscheinlichkeit, eine gestellte Aufgabe in Angriff zu nehmen, hängt ab von der Selbstbeurteilung;

- Teilnehmer mit (induzierter) positiver Selbstbeurteilung bieten häufiger Lösungsvorschläge und zeigen eine größere Bereitschaft, sich an der Diskussion zu beteiligen.

- Positive Selbstbeurteilung bewirkt eine positive Beurteilung zukünftigen Verhaltens (Webster/Sobieszek 1974).

Da diese Situation spezifisch ist für Unterricht, soll näher hierauf eingegangen werden. Glieder einer Problemlöse-Gruppe, die sich nicht kennen und eine Aufgabe gemeinsam bearbeiten, verteilen nach einiger Zeit Teilnahme an der Diskussion und Einfluß auf Gruppenentscheidungen ungleich auf ihre Mitglieder. Sie haben sich ein Bild gemacht von den (aufgabenrelevanten) Fähigkeiten jedes einzelnen: sie formen einen "erwarteten Leistungsstatus" ("performance expectation state") (Berger et al. 1972). Dieser Begriff des "erwarteten Leistungsstatuts" (PES) hängt ab von der Gruppeninteraktion (s.Webster/Sobieszek 1974, 31-37).

Der Begriff des PES ist situationsspezifisch gefaßt. Da das Individuum nicht nur Erwartungshaltungen bzgl. der Leistung anderer Mitglieder der Gruppe entwickelt, sondern auch sich selbst gegenüber, bietet sich für letzteres der Begriff Selbsterwartung (self-expectation) an.

PES wird gegenüber Selbstbeurteilung (self-evaluation) abgegrenzt durch

- seinen situations- und aufgabenspezifischen Aspekt. In Selbstbeurteilung gehen auch transsituative Momente ein.
- seine Beziehung zu einem Paar von Individuen. PES eines Individuums ist nur erklärt relativ zu einem anderen. Selbstbeurteilung enthält keine explizite Relativität zu einem (bestimmten) anderen.

Daß situationsspezifische Selbstwahrnehmung auch das generelle Selbstbild beeinflußt, wurde in anderem Kontext von FILIPP/BRANDSTÄDTER (1975) festgelegt.

Die Beziehung von PES zu Selbstbeurteilung ist somit analog zur Beziehung Selbstbeurteilung - SK.

FREESE (1969) und BERGER/FISEK (1974) legen die Interpretation nahe, daß bei Mangel an Information (mindestens) zwei Gründe für die Ausbildung bestimmter Erwartungsmuster möglich sind:

- Spezifische soziale Charakteristiken (z.B. nicht-aufgabenspezifische Fähigkeiten)
- Unterschiedliche Statuscharakteristik (wie z.B. Rasse, Geschlecht), d.h. bei verschiedener Statuscharakteristik von Beurteiler und Beurteilten werden gewisse Erwartungen abgeleitet (im Falle gleicher Statuscharakteristik dagegen nicht).

4. INTERPRETATION UND KONSEQUENZEN FÜR DEN UNTERRICHT

Das Modell des Interaktionismus legt folgende Thesen nahe:

* Eltern, Lehrer und peer group sind signifikant andere, deren Einflußbereiche sich zumindest z.T. isolieren lassen.
* Bei der peer group wird es sich um einen "generalisierten anderen" handeln.
* Für die Selbstbeurteilung bzw. die Selbsterwartung bzgl. der Leistung in einem Fach ist der Lehrer der "signifikant andere",der Beurteiler bzw. die Beurteilungsquelle, dem diesbezüglich die höchste Kompetenz zugewiesen wird.
* Aufgrund der Beurteilung der jeweiligen Beiträge durch den Lehrer innerhalb einer Problemlösesituation bildet jeder Schüler von jedem anderen Leistungserwartungen aus.
* Diese Leistungserwartung ist konsistent mit der Beurteilung durch den Lehrer.
* Diese Leistungserwartung kontrolliert die Interaktion innerhalb der Klasse (bzgl. aufgabenrelevanter Aspekte), d.h. Häufigkeit der Handlungsmöglichkeiten, Annahme oder Ablehnung des Einflusses bei divergierenden Lösungsvorschlägen etc.
* Einfluß auf die Selbstbeurteilung nimmt der Lehrer nur dann, wenn er als Beurteilungsquelle akzeptiert ist.
* Als Beurteilungsquelle wird er nur dann akezptiert, wenn seine eigene Fähigkeit, d.h.
  - Kompetenz bzgl. der zur Frage stehenden Aufgabe und
  - seine Beurteilungsfähigkeit,
  hoch eingeschätzt wird.
* Besitzt der Lehrer als niedrig eingeschätzte Statuscharakteristiken, so muß er sie durch hohe Fachkompetenz kompensieren.

* Die Beurteilung durch den Lehrer wird somit doppelt wirksam:
  - Direkt formuliert sich aus seiner Beurteilung resultierend eine Selbstbeurteilung und eine Selbsterwartung des Schülers.
  - Indirekt verstärkt sich diese Selbstbeurteilung über den durch die Mitschüler zugewiesenen PES und die sich daraus ergebenden Interaktionsmuster.
* Im Falle fehlender Information über die Kompetenz eines Mitschülers innerhalb einer Problemlösesituation werden Leistungserwartungen aus anderen Bereichen herangezogen (Halo-Effekt).
* Hohes oder niedriges Selbstkonzept, hohe oder niedrige Selbstbeurteilung als (andauernder) Charakterzug sind aufgehoben zugunsten eines Konstruktes "erwarteter Leistungsstatus" ("expectation state"), das über die Aufgabe und den situativen Kontext definiert wird.

Daß Kinder mit niedrigem SES z.B. eine niedrigere Selbsterwartung haben, ist somit sowohl eine bedeutungslose Aussage als auch ohne empirische Stütze, solange nicht die Randbedingungen thematisiert werden.

Das Modell des Interaktionismus deckt offenbar nur einen Teil des Prozesses der Ausbildung des (aufgabenspezifischen) SK ab. Als wesentliche Fragen konnten beantwortet werden:

- welche äußeren Determinanten bestimmen die Ausbildung des SK bzw. bewirken unterschiedliche SK,
- von welcher Natur sind diese SK und was determiniert ihre Stabilität bzw. Veränderung,
- wie reagieren bzw. interagieren Personen mit unterschiedlichem Selbstkonzept innerhalb von Problemlösesituationen,
- wie bewerten sie Fremdbeurteilung ihrer Leistung,

- wie bildet sich Leistungserwartung für sich selbst bzw. andere aus und wie interagieren beide,
- welches sind die Quellen der Selbstbeurteilung und der Beurteilung anderer und wie interagieren beide.

Ausgeklammert bleiben dabei Fragen, die sich beziehen auf Verhaltensschemata in "individuellen" Problemlösesituationen, auf "innere" Faktoren des Individuums und damit zusammenhängend auf Variablen, wie z.B. Motivation, Selbstverantwortlichkeit, Persistenz, Konformität u.a., auf Prozesse der Ausbildung unterschiedlicher SK bei gleichen Randbedingungen.

So werden z.B. gleiche Leistungsergebnisse von verschiedenen Individuen unterschiedlich interpretiert, unterschiedliche Gründe für das Zustandekommen dieser Leistung angeführt und damit ein unterschiedliches SK aufgebaut. Was sind die Bedingungen hierfür, wenn äußere Faktoren kontrolliert werden?

Die Theorie der Kausalattribuierung thematisiert diese Aspekte.

5. KAUSALATTRIBUIERUNG

Der Nachteil der spezifischen Betrachtungsweise des Interaktionismus liegt in seiner vollständigen Hinwendung auf äußere und in Laborversuchen kontrollierbare Aspekte. So interpretiert er den Prozeß der Ausbildung des SK als Interaktion des Individuums mit einer Umwelt (andere, "verallgemeinerte andere", "signifikante andere"), wobei das Individuum noch kein SK entwickelt hat, vielmehr diesbezüglich noch leer ist. Umwelt dient als Informationshilfe, Erkenntnisse über sein eigenes Selbst auszubilden. Notgedrungen läßt der Interaktionismus außer acht, daß diese Fälle recht selten sind, vielmehr trifft die Umwelt, insbesondere Unterricht, auf schon vorhandene, in bestimmter Weise ausgeprägte Persönlichkeitsvariablen,

mit denen sie interagiert.

Der Interaktionismus postuliert einen direkten Zusammenhang zwischen (Umwelt-)Information und Leistungserwartung (unter Berücksichtigung bestimmter situativer Randbedingungen), er postuliert damit aber auch, daß das Individuum eine Kausalität herstellt zwischen dem Selbst und dem Leistungsergebnis, die zeitliche Stabilität besitzt und somit zur Ausbildung einer Leistungserwartung führt. Als Kausa der Leistung muß somit innerhalb dieser Theorie Leistungsfähigkeit fungieren, da die Attribuierung der (positiven) Leistung auf andere Faktoren nicht erklärbar ist (es sei denn, die Leistungsergebnisse sind zeitlich instabil).

Nun weisen aber differenzierte Untersuchungen zu diesem Aspekt nach, daß auch andere Faktoren als Ursachenerklärung für Erfolg bzw. Mißerfolg herangezogen werden.

Ausgehend von der Attribuierungstheorie HEIDERs (1958) entwickelten sich differentiellere Methoden und Modelle, um unterschiedliche Kausalattribuierungen von Erfolg bzw. Mißerfolg leistungsrelevanten Verhaltens zu erklären. (Kelley 1967; Rotter et al. 1961; Atkinson 1957; Rotter 1966; Crandell et al. 1962, 1965; de Charms 1968; Weiner et al. 1971, 1972; Weiner 1975; Meyer 1973).

Ohne diese Ansätze im einzelnen referieren zu wollen (s.dazu Meyer 1973), sei nur darauf verwiesen, daß schon bei HEIDER (1958) die von WEINER (1975) ausformulierte Attribuierungsmatrix vorhanden ist. Ursachenerklärung für Leistungsergebnisse vollzieht sich demnach entlang den beiden Dimensionen "Personabhängigkeit" ("locus of control") (interval vs. external) und "Stabilität über Zeit" (stabil vs. variable) und hat die vier möglichen Ausgänge:

Personabhängigkeit / Zeitstabilität	internal	external
stabil	Fähigkeit ("Begabung")	Schwierigkeit (der Aufgabe)
variabel	Intention und Anstrengung	Zufall, (Glück, Pech)

Im Gegensatz zu Atkinsons Modell, Leistungsmotive als affektive Dispositionen aufzufassen, hebt WEINER (1971) ab, da ihm kognitive Prozesse zu wenig berücksichtigt scheinen. Leistungsmotivation zielt bei ihm daher nicht mehr ab auf Affektmaximierung (bei Hochmotivierten) bzw. Affektminimierung (bei Niedrigmotivierten), sondern auf Informationseinholung (Informationsmaximierung bei Hochmotivierten bzw. Informationsminimierung bei Niedrigmotivierten). Allerdings erklärt auch dieses Modell nicht alle vorliegenden Befunde, worauf AMES/AMES (1975) hinweisen. MEYER (1973) stellt beiden ein kognitives Modell leistungsmotivierten Verhaltens gegenüber, in dem Selbstkonzept der eigenen Fähigkeit integraler Bestandteil ist.

Ausgehend von WHITEs (1959, 1960) Konstrukt "effectance motivation" (Heckhausen, 1966, nennt es Wirksamkeitsmotivation), eigener Tüchtigkeit (Fähigkeit) entwickelt MEYER (1973) sein Modell, das fünf Eingangsvariablen enthält: Aufgaben, Instruktion, Selbstkonzept der eigenen Fähigkeit, Informationsbestreben, zurückliegende Erfahrung. Durch die Einbeziehung des Selbstkonzeptes der eigenen Fähigkeit gelingt es Meyer, die Ungereimtheiten aus dem Weinerschen Modell auszuräumen. Die Kausalattribuierung von Erfolg bzw. Mißerfolg auf die vier Faktoren Fähigkeit, Schwierigkeit, Anstrengung und Zufall erklärt sich bei Hoch- bzw. Niedrigmotivierten nur über das Selbstkonzept der zur Aufgabenbewältigung relevanten Fähigkeit; ebenso erklären sich hierdurch Wahlunterschiede für leichte bzw.

schwere Aufgaben (level of aspiration).

Das aus der Handlung sich ergebende Leistungsresultat wird durch einen "Ist-Sollwert-Vergleich" gewertet und anschließend kausal interpretiert. Dabei auftretende affektive Reaktionen sind umso größer, je eher internale Faktoren als Ursachenerklärung für Erfolg bzw. Mißerfolg herangezogen werden (Weiner et al. 1971). Diese Hypothese konnte allerdings in Nachfolgeuntersuchungen nicht bestätigt werden. MEYER (1973) stellt dem gegenüber, daß maximale affektive Reaktion auftritt bei Attribuierung auf Begabung, denn Anstrengung als Ursachenerklärung "läßt das Ergebnis änderbar erscheinen und stellt keine gravierende Beeinträchtigung des Selbstwertes dar" (Meyer 1973, 153f). Schon HECKHAUSEN (1972) wies darauf hin, daß Affektkonsequenzen besonders ausgeprägt sein dürften, wenn die Kausalattribuierung eine Revision des SK bedingt.

Meyers Ansatz erklärt auch besser die Untersuchungsergebnisse von AMES/AMES (1975), die bei einer Überprüfung des Weinerschen Modells interferierende Kausalattribuierungen durch Konfliktsituationen schafften. Ihre Ergebnisse bestätigten den Vorwurf der übergroßen Einfachheit im Weinerschen Modell, das von den Vpn Ursachenerklärung ihres Handlungserfolges nach einem (!) Versuch verlangt und dann auf dispositioneller Grundlage kategorisiert (bzw. schlußfolgert). AMES/AMES (1975) schlagen daher die Aufnahme der Kategorie "Konsistenz über Zeit" (des Leistungsresultates) in das Modell vor, um auch typische komplexe Handlungssituationen erklären zu können, in denen normalerweise mehr als ein Handlungsresultat als Informationshilfe verfügbar ist (Vorerfahrung, Übertragung anderer Leistungsmuster auf diese Tätigkeit etc.). Hier geht aber massiv das SK der eigenen Leistungsfähigkeit ein, das aus zurückliegender Erfahrung entspringt.

6. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN SK UND ANDEREN PERSÖNLICHKEITSMERKMALEN

6.1 SK und Persistenz

In diesem Modell werden die Unterschiede der Persistenz zwischen Hoch- und Niedrigmotivierten verständlich. Die vielfach nachgewiesene höhere Persistenz bei Hochmotivierten erklärt sich durch das höhere SK, das Hochmotivierte eher haben als Niedrigmotivierte. Treten bei der Bearbeitung komplexer Aufgaben Schwierigkeiten auf (Mißerfolg), erklären Individuen mit hohem SK dies eher mit mangelnder Anstrengung, womit höhere Anstrengung und somit Weiterbearbeitung der Aufgabe als lohnend angesehen wird, Niedrigmotivierte (niedriges SK) hingegen attribuieren Mißerfolge auf mangelnde Begabung, womit auch weitere Anstrengung nicht als sinnvoll erscheint.

Gerade umgekehrt liegt der Sachverhalt allerdings, wenn nicht Mißerfolg, sondern Erfolg induziert wird: hier zeigen Mißerfolgmotivierte (niedriges SK) größere Persistenz als Erfolgsmotivierte. Bei hoch eingeschätzter eigener Begabung liefern mit Erfolg bearbeitete leichte Aufgaben keine Information mehr über die eigene Leistungsfähigkeit, es wird daher bald abgebrochen.

Damit ist auch das Konstrukt Persistenz nicht losgelöst von situativen Komponenten denkbar, nicht mehr intraindividuell-stabile Variable, sondern definiert bezüglich aufgabenspezifischer Randbedingungen.

6.2 SK und Konformität

Konformitätsunterschiede zwischen Hoch- und Niedrigmotivierten lassen sich ebenfalls erklären über die unterschiedliche Ausprägung aufgabenspezifischen Selbstkonzeptes. McCLELLAND (1953) interpretiert sie zwar über die größere "innerdirectedness" bzw. Unabhängigkeit der Erfolgsmotivierten, aber es ist naheliegender, Fähigkeits-

konzepte als Erklärung heranzuziehen. Wird die eigene Fähigkeit als niedrig angenommen, so schätzt man andere als kompetenter ein, akzeptiert das eigene Urteil als falsch und schließt sich der Mehrheit an (dem Urteil des "signifikanten anderen" würden Webster/Sobieszek sagen). Diese Erklärung stützt sich auf Untersuchungen von Hoch- und Niedrigmotivierten, die Konformitätsunterschiede nur unter der "no-information"-Bedingung zeigte (die Vpn hatten keine Information über ihre Fähigkeit), in der "information"-Bedingung (hier wurde gute Fähigkeit induziert) ergaben sich keine Unterschiede mehr. Konformität ergibt sich demnach nicht aus einer (affektiven) Motivation, sondern aus dem (ggf. induzierten) Selbstkonzept eigener Leistungsfähigkeit.

6.3 SK und Anspruchsniveau

Anspruchsniveau (level of aspiration) ist zwar als beobachtbares Phänomen klar erfaßt und meßbar, doch liegen verschiedene Modelle vor, wie es theoretisch einzuordnen sei. Anspruchsniveau bezeichnet die Höhe des auf ein Handlungsresultat folgenden Ziels, wobei sowohl die Richtung als auch die Größe der Diskrepanz zwischen Handlungsergebnis und Zielsetzung gemessen wird.

SEARS (1941) hatte gefunden, daß Individuen mit wiederholter Mißerfolgserfahrung entweder ihre Ziele unter dem Handlungsresultat ansetzten und somit eine negative Diskrepanz bewirkten (ND) oder unverhältnismäßig hohe Ziele angaben und somit eine hohe positive Diskrepanz verursachten (HPD). Individuen mit einer Erfolgsbiographie setzten ihre Ziele mäßig oberhalb des Leistungsresultats an (LPD = low positive discrepancy).

Das so definierte Konstrukt "Anspruchsniveau" läßt zwei Interpretationen zu:

- zum einen als Index der Selbstverantwortlichkeit für Erfolg bzw. Mißerfolg einer Handlung (Meyer 1973;

Atkinson/Feather 1966, Higbee/Streufert 1969 u.a.):

Mit wenig ausgeprägter Selbstverantwortlichkeit

- werden die absoluten Differenzen zwischen letzter Leistung und nachfolgender Zielsetzung größer,
- treten häufiger Übereinstimmung aufeinanderfolgender Zielsetzungen trotz Erfolges bzw. Mißerfolges auf,
- tritt häufiger Senken nach Erfolg auf ("atypisches Verhalten" (Atkinson/Feather 1966)).

- zum anderen als Index des SK der zur Frage stehenden Fähigkeit. Das Anspruchsniveau erklärt sich aus dem vorhandenen SK und der (damit zusammenhängenden) Kausalattribuierung des Erfolges und Mißerfolges. Wird Erfolg aufgrund niedrigen Selbstkonzeptes externalen Faktoren zugeschireben, so wird die Erwartung zukünftiger Handlungsresultate unrealistisch (Kay/Felker 1975). Dabei spielen sowohl die direkt vorangegangenen Leistungsergebnisse eine Rolle als auch die Selbstbeurteilung, die sich auf frühere oder ähnliche Handlungen stützt, und die Fremdbeurteilung (Diggory 1966, Webster/Sobieszek 1974).

Beide Interpretationen sind nicht so gegensätzlich, wie hier apostrophiert. Selbstverantwortlichkeit und SK eigener Leistungsfähigkeit bedingen sich wechselseitig. Die Ausbildung eines SK eigener Fähigkeit setzt voraus, daß diese Fähigkeit erfahrbar war, daß diese Fähigkeit als Kausa für ein(Handlungs-)Resultat verantwortlich gemacht wurde. Selbstverantwortlichkeit beinhaltet Attribuierung auf internale Faktoren und bedingt Einschätzung der Fähigkeiten.

7. SELBSTKONZEPT ALS LERNER

Neben dem auf der Hand liegenden SK eigener fachspezifischer Fähigkeiten gibt es nach PURKEY (s.Purkey 1974, 1975 und Purkey/Cage/Graves 1973) auch ein SK als Lerner. Allerdings wäre kritisch anzumerken, daß dieses SK sich

wesentlich bestimmt aus affektiven Komponenten. Purkeys Test zur Bestimmung dieses SK als Lerner, der "Florida Key", bezieht sich auf folgende Faktoren:

- "Beziehungsfähigkeit" ("relating"), d.h. die Fähigkeit, Beziehungen zu anderen zu knüpfen, aufrechtzuerhalten u.ä.,
- "Äußerungsfreiheit" ("asserting"), d.h. die Freiheit, persönliche Gefühle, Wünsche etc. zu äußern und danach zu fragen bzw. gefragt zu werden,
- "Investieren" ("investing"), d.i. das Gefühl der Sicherheit, sich in neue Tätigkeiten zu "investieren", neues auszuprobieren und freiwillig neue, ungewohnte Aufgaben zu übernehmen,
- "Bewältigen" ("coping") bezeichnet die Fähigkeit, mit seinen eigenen Erwartungen bzw. mit den Ansprüchen der Gesellschaft fertig zu werden.

Purkey untersucht leider nicht näher die Variablen, die diese vier Faktoren bestimmen. Ausgehend von einem "humanistischen" Erziehungsideal werden vielmehr diffuse affektive Komponenten herangezogen, um schulisches Klima zu verbessern (an dessen Verbesserungsnotwendigkeit hier nicht gezweifelt werden soll), doch ergeben sich zwingend keine pädagogischen Konstruktionsvorschläge. Bestenfalls ließe sich als Konklusion für Unterrichtsforschung hervorzaubern:

> "... the "good" teacher may best be understood in his or her personal world of perceptions, attitudes, and beliefs. If we overlook teacher attitudes, we are likely to miss the most important part of what a teacher is and does" (Purkey 1974).

Die Schwierigkeiten, Einstellungen und Glauben des Lehrers anhaltend und prinzipiell zu ändern, sind hinlänglich bekannt, und es muß fraglich erscheinen, ob diese Strategie tatsächlich mangelnde Kompetenz auf seiten des Lehrers kompensieren bzw. auf seiten der Schüler ausreichend

bewirken kann. Zudem sind zu wenig Techniken bekannt, um Lehrer einem "attitude-" oder "belief-storming" unterziehen zu können.

Das Konstrukt "SK als Lerner" wird aber in anderem Zusammenhang bedeutsam. So finden sich in der bundesdeutschen Hauptschule jene Schüler versammelt, "die ein negatives Selbstbild bzw. Selbstwertbewußtsein in bezug auf ihr Schulleistungsvermögen entwickelt haben" (Lüttge 1975). Daß daran auch die Einführung der Gesamtschule bzw. Orientierungsstufe mit ihrer Differenzierung nach Leistungskursen nichts ändert, wird man wohl konstatieren können, da die Änderung von Haupt- in C-Kursschüler (o.ä.) nur eine terminologische, aber keine des Bewußtseins ist. Solange aber Organisationsformen der Schule und damit verbunden des Unterrichts auf vermeintliche und mit Werturteilen besetzte Gegebenheiten bei den Schülern abzielen, keimt wenig Hoffnung auf Verbesserung. Solange Leistungskurse in unterschiedlichem Tempo und in divergierende Richtungen des Abstraktionsniveaus sich entwickeln, machen im Bewußtsein der Schüler unüberbrückbare Qualitätsdifferenzen sich fest, die Schule eher zu manifestieren als aufzuheben sich anschickt. Die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten in der Unterrichtspraxis, Änderungen der Erwartungshaltungen auf seiten des Lehrers und daraus resultierende defizitäre Unterrichtsprozesse sind an anderer Stelle bereits diskutiert worden (Lüttge 1975). Auch soll der im Licht empirischer Forschung zweifelhafte Pygmalioneffekt nicht als trüber Ausblick auf die Zukunft des Hauptschülers diskutiert werden (s.dazu Dusek 1975). Doch steht zu überlegen, wie durch eine andere Form des Unterrichts gerade diesen Mißständen begegnet werden kann.

Da sich das SK bzgl. schulrelevanter Aspekte gerade im Alter von 1o-12 zu stabilisieren beginnt (Lorenz 1975, Sabotta/Clifford 1975), scheint mir vor allem in den Klassen 5 und 6 eine Hinwendung zu Differenzierungen notwendig, die auf optimale Förderung des einzelnen durch Anpassen

der didaktischen Konstrukte und der Lehr-Lernorganisation auf seine spezifischen Dispositionen abhebt, (siehe hierzu die in diesem Zusammenhang verfaßten Aufsätze). Daß damit die Aufgabe eines für alle (bzw. für bestimmte Gruppen) verbindlichen Feinlernzielkatalogs einhergeht, liegt auf der Hand.

LITERATUR

Ames C./Ames R. : Internal vs. external determinants of children's perceptions of the causes of their behavior. Paper presented at the AERA meeting 1975

Atkinson J.W. : Motivational determinants of risk-taking behavior. Psych. Review 64, 359-372 (1957)

Atkinson J.W. : A theory of achievement motivation. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1966

Berger J./ Cohen B.P./ Zelditch M. : Status characteristics and social interaction. Am. Soc. Review 37, 241-255 (1972)

Bilby R.W./ Brookover W.B./ Erickson E.L. : Characterizations of self and students decision making. Rev.Ed.Res.42(4),5o5-524 (1972)

Calsyn R.J. : The causal relationship between self-esteem, a locus of control and achievement: a cross-lagged panel analysis. DAI,34A 4o76 (1973)

Cooley C.H. : Human nature and the social order. New York: Schocken Books, Inc. 1964

Couch C.J. : Self attitudes and degree of agreement with immediate others. Am. J. Soc. 63, 491-496 (1958)

Crandall V.C./ Katkovsky W./ Crandall V.J. : Children's beliefs in their own control of reinforcements in intellectual-academic achievement situations. Child Dev. 36, 91-1o9 (1965)

Crandall V.J./ Katkovsky W./ Preston A. : Motivational and ability determinants of young children's intellectual achievement behaviors. Child Dev. 33, 643-661 (1962)

De Charms R. : Personal causation. New York: Academic Press 1968

Diggory J.S. : Self-Evaluation: Concepts and studies. New York: J. Wiley & Sons. Inc. 1966

Dusek J.B. : Do teachers bias children's learning? Rev.Ed.Res. 45 (4), 661-684 (1975)

Filipp S.-H./ Brandtstätter J. : Beziehungen zwischen situationsspezifischer Selbstwahrnehmung und generellem Selbstbild. Psych. Beiträge 17, 4o6-417 (1975)

Haas H.I./ Maehr M.L. : Two experiments on the concept of self and the reaction of others. J. of Personality and Soc.Psych. 1, 1oo-1o5 (1965)

Heckhausen H. : Einflüsse der Erziehung auf die Motivationsgenese. In: Hermann, T. (Ed.): Psychologie der Erziehungsstile. Göttingen: Hogrefe 1966, 131-169

Heckhausen H. : Die Interaktion der Sozialsationsvariablen in der Genese des Leistungsmotivs. In: Graumann, C.F. (Ed.): Sozialpsychologie. Handb. Psych. Bd. 7. Göttingen: Hogrefe 1972, 953-1019

Heider F. : The psychology of interpersonal relations. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1958

Higbee K.L./ Streufert S. : Perceived control and riskiness. Psychon.Sci. 17, 105-106 (1969)

Israel J. : Self-evaluation and rejection in groups. Stockholm: Almquist and Wiksell 1956

Jones S.C. : Some Determinants of interpersonal evaluating behavior. J. of Personality and Soc. Psych. 3, 397-403 (1966)

Jones S.C. : Some effects of interpersonal evaluations on group process and social perception. Sociometry 31, 150-161 (1968)

Jones S.C./ Pines H.A. : Self-revealing events and interpersonal evaluations. J. of Personality and Soc. Psych. 3, 277-281 (1968)

Jones S.C./ Ratner C. : Commitment to self-appraisal and interpersonal evaluations. J. of Personality and Soc. Psych. 6, 442-447 (1967)

Kay R.S./ Felker D.W. : Level of aspiration: A behavioral expression of self-concept. Paper presented at the AERA meeting 1975

Kelley H.H. : Attribution theory in social psychology. In: Levine, D. (Ed.): Nebraska Symposium on Motivation, 1967. Lincoln: Univ. Nebraska Press, 1967, 192-238

Kifer E. : Relationship between academic achievement and personality characteristics: A quasi-longitudinal study. Am. Ed. Res. J. 12 (2), 191-210 (1975)

Lorenz J.H. : Selbstkonzept und Selbsteinschätzung. Schriftenreihe des IDM 4, 49-65 (1975)

Lüttge D. : Psychologische Aspekte der Förderung. Westerm.Päd. Beiträge 27 (12), 658-667 (1975)

Lynch M.D./ Chaves J. : Do self-concept-tests test self-concept: An evaluation of the validity of items on the Piers Harris and Coopersmith measures. Paper presented at the AERA meeting 1975

Maehr M.L./ Mensing J./ Nafzger S. : Concept of self and the reaction of others. Sociometry 25, 353-357 (1962)

McClelland D.C./ Atkinson J.W. Clark R.A./ Lowell E.L. : The achievement motive. New York: Appleton 1953

Mead G.H. : Mind, self and society. Chicago: University of Chicago Press 1934

Meyer W.V. : Leistungsmotiv und Ursachenerklärung von Erfolg und Mißerfolg. Stuttgart: Klett 1973

Miyamoto S.F./ Dornbusch S.M. : A test of interactionist hypothesis of self-conception. Am.J.of Soc. 41, 399-4o3 (1956)

Moore J.C. : A further test of interactionist hypothesis of self-conception. Techn. Report No. 6, Laboratory for Social Res., Stanford University, Stanford, Calif. 1964

Purkey W.W. : Teacher attitudes: Castel Windows and Casket Lids. Alpha Delta Kappan 4, 1o-11 (1974)

Purkey W.W. : What does it mean to have a good self-concept as learner. Unpublished manuscript, 1975

Purkey W.W./ Cage B.N. / Graves W. : The Florida key: A scale to infer learner self-concept. Ed. and Psych. Measurement 33, 979-984 (1973)

Reeder L.G. / Donohue G.A./ Biblarz A. : Conceptions of self and others. Am.J. of Sociology 66, 153-159 (196o)

Rotter J.B. : Generalized expectancies for internal vs. external control of reinforcement. Psych. Monogr. 8o, No.1 1966

Rotter J.B./ Liverant S./ Crowne D.P. : The growth and extinction of expectancies in chance controlled and skilled tasks. J.Psych. 52, 161-177 (1961)

Sabotta T./ Clifford M.M. : Locus of control and academic performance in option situations. Paper presented at the AERA-meeting 1975

Sears P. : Level of aspiration in relation to some variables of personality: clinical studies. J.Soc.Psych. 14, 311-336 (1941)

Sullivan H.S. : Conceptions of modern psychiatry. Washington, D.C.: W.H. White Psychiatric Foundation 1947

Videbeck R. : Self-conceptions and the reactions of others. Sociometry 23, 351-359 (1960)

Webster M./ Sobieszek B. : Sources of self-evaluation. J. Wiley & Sons, 1974

Weiner B. : Die Wirkung von Erfolg und Mißerfolg auf die Leistung. Huber - Klett 1975

Weiner B./ Frieze I./ Kukla A./Reed L. Rest S./Rosenbaum R.M. : Perceiving the causes of success and failure. New York: General Learning Press 1971

Weiner B./ Heckhausen H./ Meyer W.U./Cook R. : Causal ascription and achievement behavior: A conceptual analysis of effort and reanalysis of locus of control. J.Pers.Soc.Psych. 21, 239-248 (1972)

White R. : Motivation reconsidered: The concept of competence. Psych. Rev. 66, 297-333 (1959)

White R. : Competence and the psychosexual stages of development. In: Jones, M.R. (Ed.): Nebraska Symposium on Motivation. Lincoln: Univ. Nebraska Press 1960, 97-141

DIFFERENZIERUNG UND LERNZIELE IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER ORIENTIERUNGSSTUFE - DIDAKTOGENE SCHWIERIGKEITEN AM MUSTERFALL BRUCHZAHLEN

Hendrik Radatz

Diskutiert werden grundsätzliche Schwierigkeiten bei der Realisation von Differenzierungsintentionen im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe. Die Probleme entstehen u.E. einmal aus der Tendenz, in den Rahmenrichtlinien operationalisierte Feinlernziele verbindlich zu machen, was zu einer Linearität der didaktischen Modelle führt; zum anderen durch die frühe Zuweisung in Leistungskurse, wobei die didaktischen Konstrukte oft nur in den Übungs- und Anwendungsteilen und nicht in den Lehr-Lerntexten differenzieren.

Curriculare Vorschläge für die Behandlung des Themenkreises Bruchzahlen werden exemplarisch analysiert. Abschließend wird das sog. Mehrwegmodell als eine Alternative zur bisherigen Differenzierungspraxis und als ein variables Konzept für den Lehr-Lernprozeß vorgestellt.

1. DIFFERENZIERUNGSINTENTIONEN IN DEN RAHMENRICHTLINIEN

Im Hinblick auf die leitenden Zielvorstellungen und die besonderen Aufgaben der Orientierungs- bzw. Förderstufe kommt der Differenzierung (insbesondere im Selektionsfach Mathematik) eine grundlegende Bedeutung zu. Aus diesem Grund findet man in den Vorbemerkungen und Präambeln nahezu aller Rahmenrichtlinien dieser Schulstufe unterschiedlich präzisierte Ausführungen zur Differenzierung. Unabhängig davon, ob eine äußere Differenzierung des Schülerjahrgangs vorgeschrieben wird, heben nahezu alle Richtlinien die Bedeutung der inneren Differenzierung hervor.

Um die kompensatorischen Bemühungen der Primarstufe fortzusetzen und um die Chancengleichheit zu vergrößern, wird u.a. gefordert:

> "Leitprinzip für alle differenzierenden Maßnahmen im Bereich der Orientierungsstufe sollte die Behebung von Lerndefiziten in lernintensiven und lernzielorientierten Kleingruppen und die Schaffung optimaler Lernchancen für alle durch entsprechende Unterrichtsorganisation sein. Dagegen ist die Außendifferenzierung nach dem Modell von A,B,C - Kursen oder dem FEGA-Prinzip auf dieser Stufe problematisch." (1)

Es wird von den Autoren der Rahmenrichtlinien gesehen, daß diese Forderung an den Lehrer in zweifacher Hinsicht erhöhte Anforderungen stellt: Für die Wahrnehmung der Differenzierungsaufgaben muß er über Differenzierungskriterien und geeignete Diagnosehilfen verfügen, und er muß im Rahmen der Vorgaben in der Lage sein, Differenzierungsmöglichkeiten und curriculare Vorschläge zu nutzen bzw. zu realisieren.

Während in einigen Rahmenrichtlinien mit Differenzierung die Intensität des Erarbeitens von mathematischen Themenkreisen bzw. auch das Weglassen von Inhalten für langsame Lerner verbunden wird, werden andererseits gleiche Lerninhalte und gleiche Lernziele für alle Schüler gefordert. Mit Hilfe einer verstärkten Individualisierung sollen

> "... die Leistungsunterschiede der Schüler weniger durch das Angebot unterschiedlicher Lerninhalte als vielmehr durch unterschiedliche Lern- und Lehrverfahren berücksichtigt" (2)

werden.

Die Hoffnung auf eine Differenzierung durch Variation der Unterrichtsverfahren erstreckt sich nicht nur auf die Binnendifferenzierung sondern auch auf die Kurssysteme.

> "Dabei sollen in verschiedenen Kursen gleiche Lernziele mit Hilfe unterschiedlicher Unterrichtsverfahren verfolgt werden." (3)

Anmerkungen: (1) Richtlinien und Lehrpläne für die Orientierungsstufe (Klassen 5 und 6) in Nordrhein-Westfalen. Düsseldorf 1974, S.10.

(2), (3) Handreichungen für die Orientierungsstufe, vorläufige. Hrsg.v.Niedersächsischen Kultusminister, Hannover 1974, S.IV.

Die Lehrmaterialien müssen daher einer äußeren Differenzierung genügen und eine innere Differenzierung ermöglichen.(1)

In den nachfolgenden Abschnitten werden einige Fragen und Probleme diskutiert, die sich aufgrund der Forderung nach Differenzierung in den Unterrichtsverfahren ergeben:

* Wie sieht die derzeitige Realität in den Lehrmaterialien aus und welche Hilfen werden dem Lehrer geboten, um die Forderungen der Rahmenrichtlinien zu erfüllen?

* Ist es überhaupt möglich, unterschiedliche Voraussetzungen der Schüler durch methodische Maßnahmen auszugleichen, so daß von allen die gleichen Lernziele erreicht werden?

* Wird bei Variation der Unterrichtsmethode noch derselbe Unterrichtsinhalt vermittelt?

* Welche Bedingungsmomente und welchen Entscheidungsbereich müßte der Mathematiklehrer bei differenzierenden Maßnahmen berücksichtigen?

2. DIE PRAXIS IN DEN MATHEMATIKLEHRBÜCHERN DER ORIENTIERUNGSSTUFE

Wir sehen Lehrbücher als Sammlung didaktischer Konstrukte an und sind uns bewußt, daß derartige Curriculummaterialien nicht die wirkliche Unterrichtssituation widerspiegeln können. Andererseits sind Lehrbücher und Lehrerhandbücher - und in der Primarstufe und Orientierungsstufe meistens nur das eine 'eingeführte' - die wesentlichen Anregungs- und Informationsquellen für den Lehrer. Die Rahmenrichtlinien selbst haben kaum einen direkten Einfluß auf die Unterrichtsplanung und das Unterrichtsgeschehen. Der Lehrer verläßt sich auf die vermittelnde Funktion des Lehrbuches, das ja die Rahmen-

---

Anmerkung: (1) vgl. Rahmenrichtlinien Sekundarstufe I, Mathematik. Hrsg.v.Hess.Kultusminister o.J., S.8.

richtlinien erfüllen muß, diese aber zugleich auch inhaltlich beeinflußt. So kommt dem Lehrbuch bzw. den Lehrmitteln neben dem Lehrer eine Schlüsselfunktion zu.

Um uns einen Überblick über die vorherrschenden Tendenzen in den Mathematikbüchern der 6. Schuljahre zu verschaffen, haben wir die uns zugänglichen 26 Lehrwerke im Hinblick auf vier grobe Raster analysiert: die Art der Differenzierung, die Organisation der Differenzierung und exemplarisch an der Behandlung des Themenkreises Bruchzahlen, das didaktische Verfahren sowie das didaktische Modell. Darunter soll im einzelnen verstanden werden:

Art der Differenzierung: Unterschieden wird zwischen Differenzierung nur in den Anwendungs- und Übungsteilen, Differenzierung auch in den Lehr-Lerntexten, Differenzierung allein durch Weglassen ganzer Inhaltsbereiche bzw. Themenkreise und keine Differenzierung.

Organisation der Differenzierung: Welche Organisationsformen der äußeren Differenzierung werden neben den allgemeinen und nicht expliziten Hinweisen zur inneren Differenzierung vorgeschlagen? Die Benennung der Niveaugruppen ist dabei sehr unterschiedlich, z.B. Fundamentum - Ergänzung - Spitzenleistung, Fundamentum - 1. Erweiterung - 2. Erweiterung, A - B - C Stufen.

Didaktisches Verfahren (beim Themenkreis Bruchzahlen): Unterschieden wird zwischen Einweg (d.h. ein didaktisches Modell dominiert), Allweg (ein Thema wird von allen Schülern über mehrere didaktische Modelle bearbeitet) und Mischweg (von Abschnitt zu Abschnitt innerhalb eines Themenkreises können die didaktischen Modelle wechseln).

Didaktisches Modell (beim Themenkreis Bruchzahlen): Untersucht wurden die inhaltlichen Konzepte bzw. die

auf Sachanalysen beruhenden Modelle, die den Bruchzahlen dominierend zugrunde liegen.

Der Analyse von Mathematiklehrbüchern zum 6. Schuljahr lassen sich fünf Ergebnisse bzw. Tendenzen entnehmen (vgl.Fig.1):

- Bis auf wenige Ausnahmen beschränken sich die Differenzierungsvorschläge in den Lehrwerken auf die Übungs- und Anwendungsaufgaben. Hier kennzeichnen die Lehrbuchautoren mit Hilfe einer breiten Palette von Symbolen (Farbunterlegungen, Punkte, Sterne, Eulen usf.) ihre Einschätzung vom Schwierigkeitsgrad und Abstraktionsniveau der Aufgaben. In den entscheidenden Lehr-Lernteilen wird eine Differenzierung kaum angeboten.
- Erstaunlich groß ist für diese Schulstufe der Anteil der Lehrbücher, in denen Hinweise zur Differenzierung gänzlich fehlen. Einige Lehrwerke überlassen die Differenzierungsentscheidung ausdrücklich dem Lehrer. So steht in einem Lehrbuch:

  > "Die zu treffende Entscheidung (bzgl. der Differenzierung, d.V.) können wir schon aus wirtschaftlichen Gründen dem Lehrer nicht abnehmen. ... (ansonsten, d.V.) wäre die Auflagenhöhe geringer und damit das einzelne Buch für den Schüler teurer."

- Offensichtlich in Anpassung an die vorherrschende Differenzierung in A,B,C-Kurse und entsprechend dem dreigliedrigen Schulsystem dominiert die Leistungsdifferenzierung in drei Niveaugruppen.
- Nahezu allen Schülern wird nur der "eine Weg" angeboten, d.h. nur ein inhaltliches Modell liegt dem didaktischen Konstrukt zugrunde. Auf die Fragwürdigkeit dieses didaktischen Verfahrens im Hinblick auf die Lernzielformulierungen, die Erfüllbarkeit von Lernzielen und die Möglichkeiten methodischer Differenzierungen wird im nächsten Abschnitt eingegangen.
- Im Bereich der Bruchzahlen im 6. Schuljahr bilden das sog. Operatormodell sowie das Teilen von kontinuierlichen Mengen (Tortenmodell) die Grundlage für die

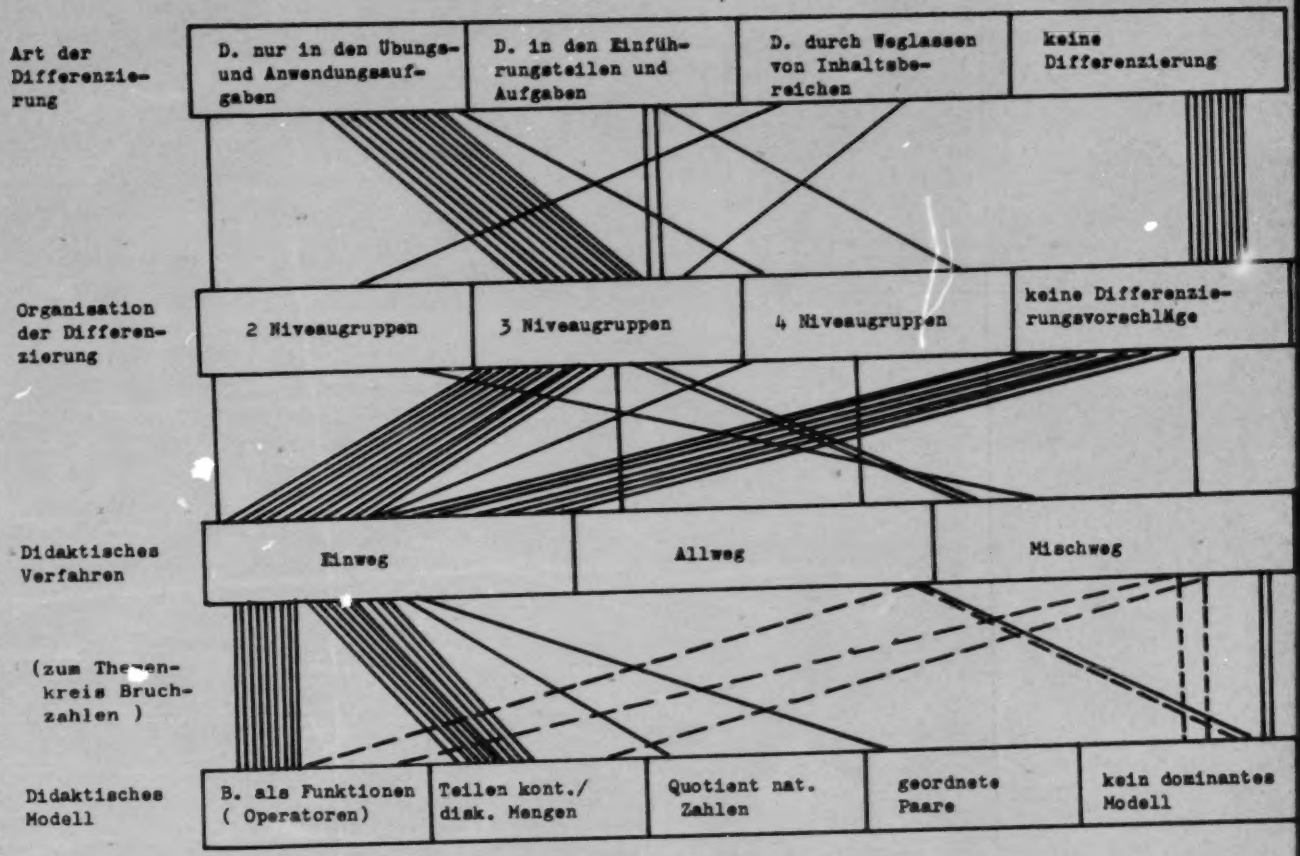
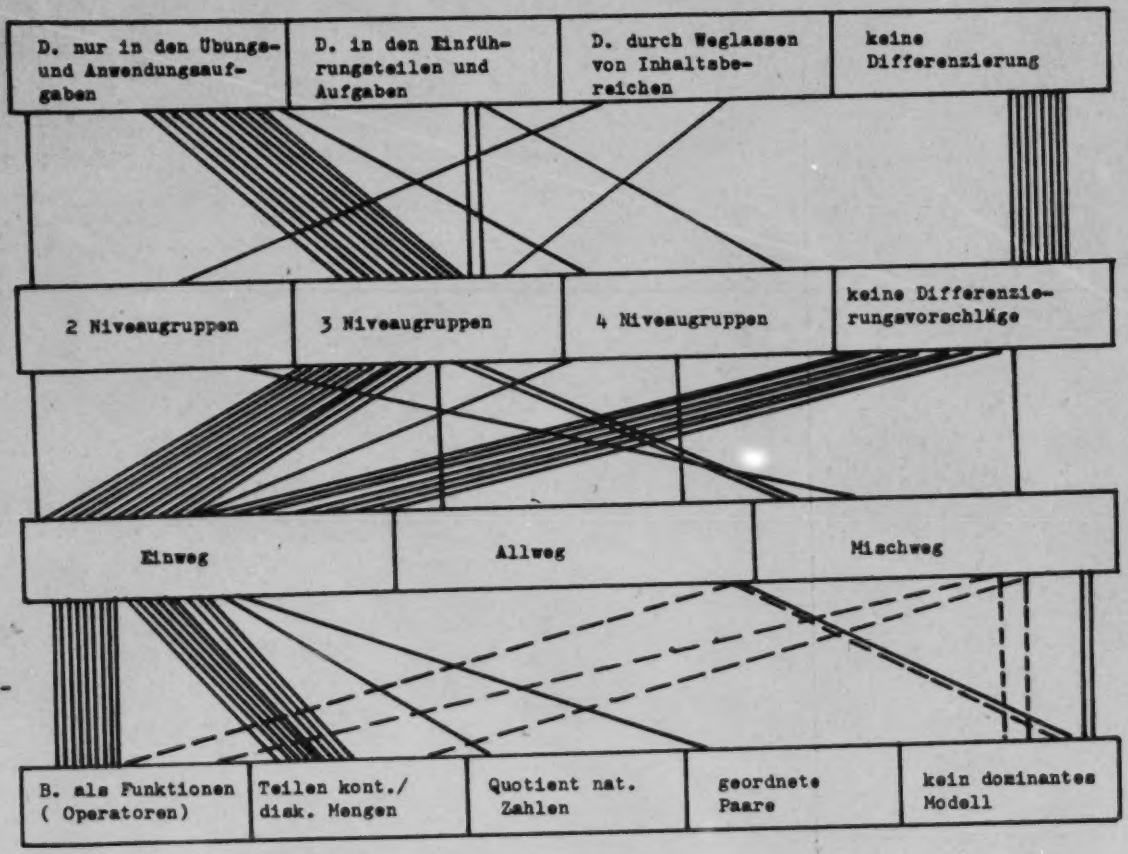


Fig. 1 : Analyse von 26 Lehrbüchern zum Mathematikunterricht in 6. Schlj.


D. nur in den Übungs- und Anwendungsaufgaben
D. in den Einführungsteilen und Aufgaben
D. durch Weglassen von Inhaltsbereichen
keine Differenzierung
2 Niveaugruppen
3 Niveaugruppen
4 Niveaugruppen
keine Differenzierungsvorschläge
Einweg
Allweg
Mischweg
B. als Funktionen (Operatoren)
Teilen kont./ disk. Mengen
Quotient nat. Zahlen
geordnete Paare
kein dominantes Modell

Begriffsentwicklung in den meisten Lehrbüchern. Dabei ist eine zunehmende Tendenz zum Operatormodell in den verschiedensten Ausprägungen feststellbar.

Die Zuordnung zwischen dem didaktischen Verfahren und dem didaktischen Modell der Bruchrechnung ist nicht in jedem Fall eindeutig. Die Zweifelsfälle sind in Fig.1 durch gestrichelte Verbindungen gekennzeichnet.

Wir wollen im Rahmen dieses Artikels auf eine ausführliche Diskussion der Leistungsdifferenzierung in Niveaugruppen verzichten und verweisen auf die kritischen Analysen von HOPF(1) und PRELL et al.(2) Die Mehrzahl der vorliegenden Untersuchungen deutet darauf hin, daß bei einer relativ homogenen Niveaugruppendifferenzierung für die schwächeren Schüler deutliche Nachteile entstehen, andererseits den Begabten - etwa im Mathematikunterricht (3)- auch keine bemerkbaren Vorteile erwachsen.

3. EIN BEISPIEL: BRUCHZAHLEN IM 6. SCHULJAHR

Das System der vorgeschlagenen Leistungsdifferenzierung, für die dem Lehrer derzeit kaum ausreichende Kriterien, Erläuterungen oder Hilfen geboten werden, wird aus den meisten Lehrbuchabschnitten mit ihrer oft willkürlichen Klassifikation der Aufgaben nach Schwierigkeiten deutlich.

In einigen Handbüchern werden curriculare Vorschläge ausdrücklich einem Hauptschul-, Realschul- oder Gymnasialniveau zugeordnet, wodurch die Diskrepanz zwischen den Zielvorstellungen der Orientierungsstufe und der Realität in den Unterrichtsmaterialien erkennbar wird. Dazu stellt HEYMANN(4) fest:

Anmerkungen:

(1) Hopf D.: Differenzierung in der Schule. Stuttgart 1974

(2) Prell S., Schiefele H., Ulich D.: Leistungsdifferenzierung und individuelle Förderung. München 1972

(3) Prell S. et al., a.a.O., 20f

(4) Heymann H.W.: Zusammenhänge zwischen Unterrichtsvariablen, insbesondere zwischen Lernmethoden und Lerninhalten. In: Frey K. et al. (Hrsg.): Curriculum Handbuch Bd. II, München 1975, 75

> "... es gibt aber nur Lehrbücher, die, wenn sie überhaupt Aufgaben für verschiedene Schülergruppen kennzeichnen, am alten dreigliedrigen Schulsystem orientiert sind: Denken - anwenden - mechanisch ausführen, obwohl das 'Denken' für alle Schüler zu den obersten Lernzielen gehört."

Schwierigkeiten entstehen zudem aus der vorherrschenden Absolutheit und Abgrenzung didaktischer Konstrukte, dem einen Weg auf der Grundlage eines didaktischen Modells. Die Gestaltungsprinzipien für curriculare Einheiten werden sehr oft aus der Struktur der Fachdisziplin Mathematik gewonnen. Zugrunde liegen Sachanalysen bzw. mathematsche Elementarisierungen, die "allein akademische Feststellungen bleiben" und zur Realisation im Unterricht methodischer "Erfindungen" bedürfen(1). Auf die Problematik derartiger unterrichtsmethodischer Realisationen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Sachstruktur weist KLAFKI(2) hin.

Das Deduktionsverhältnis, wonach die Unterrichtsmethode aus der jeweiligen Struktur der Thematik abgeleitet werden könne und müsse, hält KLAFKI für kurzschlüssig und der Komplexität des Problems der Unterrichtsmethode nicht für angemessen. Unterrichtsmethode kann weder aus Zielsetzungen noch aus thematischen Vorgaben bzw. Entscheidungen deduziert werden.

> "Die Ziel- und Themenadäquatheit ist nur ein Bedingungsfaktor der Unterrichtsmethode, der andere ist die Adäquatheit im Hinblick auf die individuellen oder gruppen- bzw. sozialisationsspezifischen Lernvoraussetzungen der Schüler". (3)

Die Vernachlässigung der Bedingungen des Lehr-Lernprozesses sowie die Komplexität des Operatiormodells der Bruchzahlen

---

Anmerkungen:

(1) Griesel H.: Stand und Tendenzen der Fachdikdaktik Mathematik in der BRD. In: Zeitschrift für Pädagogik 1975 (21) 1, 23

(2) Klafki W.: Zum Verhältnis von Didaktik und Methodik. In: Zeitschrift für Pädagogik 1976 (22) 1, 88f

(3) Klafki W. a.a.O, 89

hatten zur Folge, daß ein sehr umfangreiches Vokabular und ein eigenständiger Begriffsapparat aufgebaut werden mußte, um das mathematische Modell methodisch in den Unterricht zu transformieren bzw. um zu einem didaktischen Konstrukt zu kommen. Aus diesem Grund blieb der Anteil der Bruchrechnung am Gesamtcurriculum zumindest gleich, obwohl einige Didaktiker die Bedeutung der Bruchrechnung grundsätzlich in Frage stellen.

Im Kapitel 'Bruchzahlen' eines gängigen Lehrwerkes müssen Lehrer und Schüler mit folgenden Begriffen arbeiten:

> Streckoperator, Streckmaschine, Strecker, Programm, Operator, Verkettung, Ersatzoperator, Ersatzprogramm, Neutralelement, Stauchoperator, Stauchер, Gegenprogramm, Eingang, Ausgang, Eingabe, Ausgabe, Anfangszustand, Endzustand, Eingabegröße, Ausgabegröße, Bruchoperator, Bruch, Bruchzahl, Bruchzustand, Maßzahlen, Größen, gemischte Zahlen, erweitern, kürzen, Zähler, Nenner, Bruchstrich, teilerfremd, gleichnamig usf.

Hinzu kommen Sätze wie:

> "Die Menge S der Streckoperatoren und die Menge S der Stauchoperatoren sind Untermengen der Menge B der Bruchoperatoren."
>
> "Man dividiert zwei Bruchzahlen, indem man den Dividenden mit der Gegenbruchzahl des Divisors multipliziert."
>
> "Bruchzahlen liegen überall dicht." u.a.

Das Vokabular und die Formulierungen unterscheiden sich von Lehrwerk zu Lehrwerk. Das Operatormodell führt sehr oft ein Eigenleben, wobei man offensichtlich didaktogene Schwierigkeiten voraussieht, wenn Hilfsformulierungen angeboten werden wie etwa zum 'Bruchstand':

> "Den Bruchstand erkennt man am 'von 1', den Bruchoperator am Punkt."

Das gegenwärtige Angebot der Lehrmaterialien zur Bruchrechnung spiegelt die Einseitigkeit bei der Wahl des methodischen Prinzips sowie des didaktischen Modells wider. Der

zunehmende Trend zum sog. Operatormodell muß verwundern, zumal u.W. weder Erfahrungen noch empirische Befunde[1] für eine Überlegenheit gegenüber anderen didaktischen Modellen sprechen. Einige Lehrbuchautoren sehen im Operatormodell ausdrücklich eine Modeerscheinung, leider bieten sie dennoch in ihren Lehrbüchern nur diesen einen Weg an.

Zusammenfassend läßt sich feststellen: Die Einseitigkeit eines curricularen Entwurfs im Hinblick auf nur ein didaktisches Konstrukt erlaubt zwar das Verfolgen von Feinlernzielen und Absichern dieser Ziele für einige Schüler, schränkt aber die Variabilität methodischer Maßnahmen ein, so daß eine Differenzierung im Sinne der Orientierungsstufenrichtlinien nicht möglich ist.

4. CURRICULARE LINEARITÄT AUF DEM HINTERGRUND EINES UNTERRICHTSMODELLS

Die im Abschnitt 2. aufgezeigte Einseitigkeit im Angebot methodischer Modelle und didaktischer Prinzipien soll auf dem Hintergrund eines Unterrichtsmodells diskutiert werden. Beide Aspekte müßten dem Variablenkomplex "Curriculum" zugeordnet werden, der neben "Schüler", "Lehrer" und "Umfeld" ein Element des Unterrichtsmodells ist. In der Diskussion sollen die Umfeldvariablen (Schulorganisation, Eltern, administrative Erlasse, Sozialisation usf.) vernachlässigt werden, da sie sich weitgehend dem direkten Einfluß des Lehrers entziehen.

Anmerkungen: (1) vgl. u.a. Capell P.: An Evaluation of the Stretchers and Shrinkers Materials and of Four Modes of Training Teachers to Use Them. Dissertation (Florida State University), DAI 34 A (1974), 4077

Wir sind uns der zentralen Rolle des Lehrers im Unterrichtsprozeß bewußt, indem er die Auswahl der Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden wesentlich mitbestimmt, curriculare Vorschläge zu sehr unterschiedlichen Wirkungen bringen kann sowie Bedingungsmomente, etwa auf seiten der Schüler, berücksichtigt oder nicht. Ob und inwieweit Differenzierung gelingt, hängt vom Lehrer und seiner Weise zu unterrichten ab und weniger von der Organisation, Gruppierung oder dem zugrundeliegenden curricularen Material.

Die Elemente "Schüler" und "Lehrer" lassen sich verhältnismäßig leicht operationalisieren. Allgemein umfassen sie die für das Lehren bzw. Lernen relevanten Merkmale und Erfahrungen. So etwa beim

Schüler: kognitive, affektive und soziale Dispositionen und Fähigkeiten[1], Vorkenntnisse und Vorerfahrungen, Einstellungen und Verhaltensrepertoire, Lernstile und individuelle Strategien beim Problemlösen, Wahrnehmungen von Situationen und Interaktionen u.a.

Lehrer : Erfahrungen und Kompetenzen, Einstellungen und Interessen, affektive und soziale Persönlichkeitsmerkmale, berufliche Sozialisation und Innovationsbereitschaft u.a.

Die anfangs zitierte These der relativen Unabhängigkeit von Lerninhalt und Unterrichtsmethode und die Forderung der Rahmenrichtlinien, mit unterschiedlichen Methoden oder Lehr-Lernorganisationen an gleichen Inhalten gleiche Lernziele zu verfolgen, macht die Aufspaltung des umfassenden Bereichs "Curriculum" notwendig.

Auf Probleme eines undifferenzierten Gebrauchs von Inhalt und Methode weist HEYMANN hin, wenn er feststellt:

Anmerkung: (1) vgl. hierzu die Beiträge von Biermann/Niedworok, Jansen/Lorenz/Radatz, Lorenz,Radatz, Suydam im Heft 4/1975 der Schriftenreihe des IDM/Universität Bielefeld

> "Die Sperrigkeit der Inhaltsvariablen ist wohl in erster Linie dafür verantwortlich, daß es bisher praktisch keine empirische Untersuchung gibt, die sie planmäßig kontrolliert; im Grunde wird immer nur vorausgesetzt, daß der Inhalt unter verschiedenen Versuchsbedingungen konstant bleibt. ... Unterrichtsinhalt wird als Chiffre gelten müssen für eine ganze Reihe verschiedenartiger operationalisierter bzw. operationabler Variablen, die im Zusammenhang mit konkreten Problemen der Curriculumkonstruktion bzw. Unterrichtsgestaltung an seine Stelle treten." (1)

Wir übernehmen HEYMANNs Vorschlag, in Unterrichtsmethode und Lehr- bzw. Lernmaterialien zu unterscheiden. Während Unterrichtsmethode alle nicht-fachspezifischen Formen der Lehr-Lernorganisationen umfaßt (wie z.B.Frontalunterricht - Gruppenunterricht, entdeckende - darbietende Verfahren u.a.) gehen in Lehr-Lernmaterialien sowohl fachspezifische Inhaltsaspekte mittels sog. Sachanalysen als auch methodische Überlegungen ein. Lehr-Lernmaterialien sind sehr spezifische Konstrukte, in die neben bestimmten mathematisch-inhaltlichen Gesichtspunkten und der Ausprägung des Inhalts in der Erfahrungswelt bzw. kognitiven Struktur des Kindes auch sog. didaktische Prinzipien (z.B. operatives Prinzip, genetisches Prinzip) und methodische Präsentationsformen (z.B. visuell-anschaulich und verbal-symbolisch, formal und problemorientiert) eingehen. Deshalb werden Lehr-Lernmaterialien auch als didaktische Konstrukte gebraucht.

Sachanalysen oder mathematische Elementarisierungen, die sich ausschließlich auf die Strukturen der Fachdisziplin Mathematik stützen, liefern keine ausreichenden Kriterien für die Curriculumkonstruktion. So stellt GRIESEL fest:

> "Die erwähnten didaktisch orientierten Sachanalysen wären unwirksam, wenn nicht durch Erfindung und Entwicklung methodischer Instrumentarien die gewonnenen Erkenntnisse auch für die Lehrgänge fruchtbar gemacht würden." (2)

Anmerkungen: (1) Heymann W. a.a.O., 74

(2) Griesel H. (1975) a.a.O., 23

Die Einseitigkeit und Linearität der meisten Lehrbücher zum Mathematikunterricht der Orientierungsstufe wird erst recht auf dem Hintergrund der Wechselwirkungen im Unterrichtsprozeß deutlich.

Die Unterrichtsforschung bietet eine große Fülle empirischer und theoretischer Untersuchungen zu den isolierten Variablen des Unterrichtsmodells, sehr oft in Verbindung mit Aussagen über bestimmte Schülerleistungen. Von etwa 2800 erfaßten Untersuchungen, Abhandlungen, Dissertationen mit Bezug zur Didaktik der Mathematik aus den letzten 3-4 Jahren lassen sich 34% der Variable Schüler, 47% dem Curriculum (berücksichtigt wurden nur Untersuchungen zu bestimmten curricularen Aspekten, nicht aber die Vielzahl der rein curricularen Entwürfe und Vorschläge) und 3% dem Lehrer im Mathematikunterricht zuordnen. Der Rest verteilt sich auf theoretische Beiträge sowie Untersuchungen zu den Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Variablen.

Der großen Anzahl der Untersuchungen insbesondere zum Schüler und Curriculum im Mathematikunterricht steht die relative Folgenlosigkeit dieser Befunde für die Curriculumkonstruktion und die unmittelbare Unterrichtspraxis gegenüber. Dafür scheinen uns mindestens drei Gründe von Bedeutung zu sein (vgl. auch HEYMANN[1]:

- Die isolierte Betrachtung einzelner Variablen kann nicht der Komplexität des realen unterrichtlichen Geschehens gerecht werden. Die häufige Nichtberücksichtigung anderer Variablen und der Interaktionen in vielen Untersuchungsdesigns schmälert die 'Brauchbarkeit' möglicher Befunde für den Unterricht.
- Eine Aussage aufgrund von Mittelwertvergleichen, daß Curriculum (Methode) A besser, gleichgut oder schlechter sei als Curriculum (Methode) B, kann als Diskussionsargument für die Verbreitung dienen, für konstruktive Ansätze innerhalb der Didaktik reicht das

---

Anmerkung: (1) Heymann a.a.O., 71

nicht aus. Man kann davon ausgehen, daß kein Curriculumentwurf, kein didaktisches Konstrukt gleichermaßen optimal für alle Schüler ist oder von allen Lehrern vergleichbar realisiert werden kann.

* Die Eindimensionalität vieler Untersuchungen und didaktischer Entscheidungen (zu spezifischen Schülern, Methoden, Inhalten, didaktischen Konstrukten, Umfeldbedingungen, Lehrern u.a.) sowie die Vernachlässigung des Prozeßcharakters im Lehr-Lernprozeß[1] erlauben keine hinreichende Repräsentativität der Ergebnisse.

Einen weitergehenden Ansatz bietet die systematische Erforschung der Wechselwirkungen zwischen den Unterrichtsvariablen. In diesem noch jungen Forschungsfeld dominieren bisher die Untersuchungen zu den Effekten der Wechselwirkung zwischen Schüler und Unterrichtsmethode sowie zwischen Schüler und Lehrer.

Die Befunde zur Wechselwirkung zwischen Schülermerkmalen und Unterrichtsmethode (Aptitude - Treatment - Interaction, Trait - Treatment - Interaction) sind oft widersprüchlich.[2] Die Gründe dafür liegen einmal in der Schwierigkeit, die Unterrichtsmethoden eindeutig zu bestimmen. Sie sind aufgaben-, inhalts- und situationsspezifisch. Zum anderen wurden auf seiten der Schüler zu globale Persönlichkeitsmerkmale gewählt[3]. Einige gesicherte Erkenntnisse, etwa zum Zusammen-

---

Anmerkungen: (1) vgl. dazu auch Bauersfeld H.: Research Related to Mathematics Learning, 1976 (i.V.)

(2) vgl. Hunt D.E.: Person-Environment Interaction: A Challenge Found before it was Tried. In: Review of Educational Research 1976 (45), 209-230.

Kilpatrick J.: Individual Differences that might Influence the Effectiveness of Instruction in Mathematics. In: Schriftenreihe des IDM 4/1975, Universität Bielefeld.

(3) Snow R.E.: Representative and Quasi-Representative Designs for Research on Teaching. In: Review of Educational Research 1974 (44), 265-291.

hang zwischen der Angstausprägung (oder dem Alter) beim Schüler und verschiedenen Unterrichtsmethoden, können aber bereits bei der Unterrichtsgestaltung berücksichtigt werden[1].

Eine umfassende Analyse und einen Überblick über die vorliegenden Untersuchungsergebnisse zur Interaktion zwischen Schüler und Lehrer (Trait - Trait - Interaction) bieten BROPHY und GOOD. Sie heben die Bedeutung dieser Wechselwirkungen besonders hervor und formulieren die Hypothese:

> "We believe that these group and individual differences among students are the key to understanding intra-class differences in teacher-student interaction patterns." (2)

Die Einstellungen, Beurteilungen und damit verbunden die Leistungen hängen fraglos ab von der Interaktion zwischen Lehrer und Schüler mit den individuellen Unterschieden in kognitiven Stilen, sozioökonomischem Status, Geschlecht usf.

Für die anderen Wechselwirkungen (z.B. Lehrer x Unterrichtsmethode, Schüler x Inhaltsbereich, Schüler x Lehrer x didaktisches Konstrukt) müssen bisher Forschungsdefizite festgestellt werden.

Auf die Wechselwirkung zwischen Unterrichtsmethode und didaktischem Konstrukt innerhalb des Variablenkomplexes Curriculum soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

5. ZUM VERHÄLTNIS VON DIDAKTISCHEM KONSTRUKT, UNTERRICHTSMETHODE UND LERNZIELEN

Die im Abschnitt 1. zitierten Richtlinienforderungen zur Differenzierung beruhen auf der Annahme, daß Schüler über verschiedene Unterrichtsmethoden in gleichen Inhaltsberei-

---

Anmerkungen: (1) vgl. Flammer A.: Individuelle Unterschiede im Lernen. Weinheim 1975.

(2) Brophy J.E., Good Th.J.: Teacher-Student Relationship. New York 1974, VIII
vgl. auch Brophy J.E., Evertson C.M.: Learning from Teaching. Boston 1976

chen oder gar didaktischen Konstrukten zu denselben Lernzielen geführt werden können.

Die Analyse der Wechselwirkungen zwischen Inhalt (im Sinne von Lehr-Lernmaterialien) und Unterrichtsmethode zeigt, daß die zu lernenden Inhalte durch verschiedene Methoden verändert werden und umgekehrt[1] die Inhaltsaspekte die Unterrichtsmethode beeinflussen. Die Lehr-Lernmaterialien und die Unterrichtsorganisation sind nicht als voneinander unabhängige Variablen anzusehen. Methodische Alternativen im engeren Sinn führen bei einem auf Sachanalyse beruhenden Modell (etwa dem Operatormodell der Bruchzahlen) zu unterscheidbaren didaktischen Konstrukturen (Vermittlung über Maschinen, Funktionsabbildungen, formale Terme o.a.), für die es bereits schwerfällt, das Vokabular für gemeinsame Lernziele zu finden. Selbst Groblernziele wie

> "Die Regel für die Multiplikation von Bruchzahlen formulieren und anwenden können." (2)

werden unterschiedlich erfüllt werden, erst recht, wenn dem didaktischen Konstrukt unterschiedliche Modellklassen (etwa zu den rationalen Zahlen das Operatormodell oder Äquivalenzklassenmodell oder Vielfachenmodell oder Teilungsmodell) zugrunde liegen, die ihrerseits in der Darstellung und Lehrorganisation stark variiert werden können.

Das für alle hessischen Schüler des 6. Schuljahres (Haupt-, Real-, Gesamtschule und Gymnasium) verbindliche Lernziel

> "Wissen, daß man durch Vertauschen von Zähler und Nenner zu jedem Operator jeweils einen Gegenoperator erhält, der die Wirkung des gegebenen Operators aufhebt" (3)

ist nur mit Hilfe eines bestimmten didaktischen Modells (Bruchzahlen über Operatormodell) erreichbar. Für Schüler,

---

Anmerkungen: (1) vgl. Heymann a.a.O., 7o

(2) Rahmenrichtlinien Mathematik Sekundarstufe I, hrsg. vom Hessischen Kultusminister, Frankfurt o.J., 48

(3) Rahmenrichtlinien Mathematik Sekundarstufe I, Hessen a.a.O., 45

die zum Bruchbegriff durch "empiristisch-anschauliche Erfahrungen"[1] beim Teilen kontinuierlicher Mengen (Tortenmodell) gelangen, ist dieses Lernziel unerfüllbar.

Operationalisierte Feinlernziele können nur für spezifische didaktische Konstrukte gelten. Die Lernzielfaszination hat in sehr vielen Lehrwerken zu einer derartigen Einseitigkeit curricularer Vorschläge geführt (vgl. Abschnitt 2.), daß eine Differenzierung im Sinne der Rahmenrichtlinienforderungen durch Variation der methodischen Mittel ausgeschlossen ist. Ein weiterer Grund für diese Linearität in den methodischen Prinzipien und didaktischen Modellen ist in dem häufig praktizierten Prinzip des Herauslösens mathematischer Begriffe aus den Umweltbezügen zu suchen. Die Erscheinungsformen des Inhalts im Erfahrungsbereich des Kindes werden bei der Gestaltung mathematischer Curricula kaum berücksichtigt, im Gegenteil, sie werden bewußt vernachlässigt. Man versucht häufig, auf einer "tabula rasa" aufzubauen und die durch gesellschaftliche Lernprozesse massiv vorgegebenen Inhaltserfahrungen auszuschalten. Auf diese Problematik weist u.a. HENNIGSEN[2] hin, indem er feststellt:

> "Die zentrale Frage, mit der ein Pädagoge am Schreibtisch und an der Wandtafel am besten weiterkommt, ist deshalb nicht, welche Inhalte für Schüler wichtig/wesentlich/notwendig/ableitbar/emanzipativ/kompetenzsteigernd etc. wären, sondern welche Inhalte die Schüler schon mitgeschleppt haben und was man damit machen kann."

Das Prinzip des Aufbaus einer 'sauberen' mathematischen Begrifflichkeit hat u.a. während der Reform des Mathematikunterrichts in der Grundschule zu einer Vielzahl didaktogener Schwierigkeiten und Fragwürdigkeiten geführt.

Aus der Erkenntnis der Wechselwirkungen zwischen methodischen und inhaltlichen Aspekten läßt sich zweierlei festhalten:

Anmerkungen: (1) vgl. Piaget J.: Die Entwicklung des Erkennens, I, Stuttgart 1972, 114f

(2) Henningsen J.: Über das ideale Schulbuch. In: Westermanns Pädagogische Beiträge 1975, 11, 631

* Operationalisierte Feinlernziele beziehen sich nur auf bestimmte didaktische Konstrukte. Sie können für die Gesamtheit des Mathematikunterrichts keine Allgemeingültigkeit haben.

* Gleiche Feinlernziele können durch Differenzierung der Unterrichtsmethode oder durch Variation der didaktischen Konstrukte nicht erreicht werden.

6. EIN NEUER ANSATZ: MEHRWEGMODELL

Der Verzicht auf konstruktspezifische Feinlernziele zu den einzelnen Inhaltsbereichen zugunsten einer Palette konstruktneutraler Lernziele oder nur sehr allgemein gehaltenen Groblernzielen[(1)] ist eine wesentliche Voraussetzung für die Differenzierung des Lehr-Lernprozesses im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe.

Die Analyse der vorliegenden Unterrichtswerke zeigt, von wenigen Ausnahmen abgesehen, daß eine Differenzierung nur in den Übungs- und Anwendungsaufgaben angeboten wird. Hier soll der Lehrer mit Hilfe einer vielfältigen Symbolgebung nach Leistung bzw. Schwierigkeitsgrad der Aufgaben differenzieren und die Schüler einem Fundamentum, einer 1., 2. oder 3. Erweiterung zuordnen. Der Schwerpunkt einer Differenzierung muß aber auf den Einführungsteil gelegt werden. Die Dominanz des didaktischen Verfahrens der Einwegmethode, verbunden mit der Linearität in den didaktischen Konzeptionen, erlaubt diese Differenzierung nicht. Sie wird durch das Abgrenzungsbedürfnis und den methodischen Absolutheitsanspruch unmöglich gemacht.

Die Grundfrage einer Differenzierung unter dieser Sicht lautet: "Für welche Schülergruppen sind welche didaktischen Konstrukte in Verbindung mit welchen Lehr-Lernorganisationen besonders geeignet?" Um sie beantworten zu können,

---

Anmerkung: (1) Groblernziele beschränken sich auf mathematische Terminologien und verzichten auf ein konstruktspezifisches Vokabular.

bedarf es der Entwicklung von Diagnosehilfen und Prognosemöglichkeiten der Lernvoraussetzungen und Lernstärken sowie von differenzierenden Curricula. Differenzierung der Schüler aufgrund unterschiedlicher Lernvoraussetzungen fordert alternative und flexible Curricula[1], d.h. alternative aber gleichwertige Wege und Lernziele.

Diagnosehilfen, Prognosemöglichkeiten und alternative didaktische Konstrukte im Sinne eines Mehrwegs sind die Elemente eines flexibel differenzierenden Mathematikunterrichts in der Orientierungsstufe. Die gebräuchlichen Differenzierungskriterien - die Zensur, die Leistung aufgrund lernzielorientierter oder informeller Tests, Intelligenztests oder der 'Eindruck' des Lehrers - genügen den Anforderungen der Diagnose nicht. In diesem Zusammenhang fordert BIRKEL[2]:

> "Unterricht und Schülerleistung werden gesteuert durch einen Komplex von Beeinflussungsfaktoren, denen man bei Verwendung eines eindimensionalen Differenzierungskriteriums niemals gerecht werden kann. Man müßte also mehrdimensional vorgehen, um effektiver differenzieren zu können."

Im Vergleich zur Einseitigkeit der didaktischen Verfahren und didaktischen Modelle der meisten Lehr-Lernmaterialien böte ein Mehrwegmodell dem Schüler Möglichkeiten, die eigenen Lernstärken und Lernschwächen vergleichend zu erfahren. Darüber hinaus könnte versucht werden, die Trennung zwischen äußerer und innerer Differenzierung durch ein System flexibler Differenzierung zu überwinden[3].

Mehr oder weniger heterogenen Lerngruppen könnte innerhalb eines mathematischen Lernbereichs bei einer stabilen

---

Anmerkungen: (1) Prell S. et al. a.a.O., 119, stellen fest:"Bloße Gruppierung der Schüler ohne Variation des Lehr-Lern-Verfahrens ist bestenfalls unwirksam."

(2) Birkel P.: Unterrichtsdifferenzierung in der Orientierungsstufe, 217. In: Ziegenspeck J. (Hrsg.): Bestandsaufnahme: Orientierungsstufe. Braunschweig 1975

(3) vgl. dazu Rolff H.G.: Innere und äußere Differenzierung. In: Ziegenspeck J. a.a.O., 2oof

sozialen Organisation differenziertes Lernmaterial angeboten werden. Dabei würden in einem Inhaltsbereich vergleichbare Lernziele durch verschiedene didaktische Konstrukte und methodische Maßnahmen angestrebt.

KLAFKI[1] sieht eine der dringlichsten Aufgaben der Methodenerprobung und Methodenforschung in der Entwicklung eines variablen Konzepts der inneren Differenzierung. Hierzu könnten Ansätze über das Mehrwegmodell einen Beitrag liefern.

Die vorliegenden Befunde der empirischen Unterrichtsforschung zum Vergleich von Einweg vs. Mehrweg bzw. den Effekten bei zunehmender Variation didaktischer Konstrukte zeigen die Vorteile des Mehrwegmodells auf. Als Beispiel soll die Untersuchung von BURTON et al.[2] erwähnt werden, die sich auf das Operieren mit Bruchzahlen bezieht. Burton et al. haben den Schülern das Thema "Multiplizieren von Bruchzahlen" nach drei Verfahren angeboten: repräsentiert durch ein, zwei oder vier didaktische Modelle. Dabei zeigt sich bei den schwächeren Schülern mit zunehmender Mannigfaltigkeit eine Steigerung des Erfolges bzw. der Leistungen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Begriffsmodell in die begrenzte kognitive Struktur aufgenommen wird, nimmt bei einer Mehrwegmethode zu.

7. KRITISCHE EINORDNUNG

Die Ziele der Orientierungsstufe stehen in einem Spannungsfeld von Förderung, Orientierung und Selektion. Während Orientierung (das Erfahren und Erproben individueller Möglichkeiten) und Selektion (jede Differenzierung zieht se-

---

Anmerkungen: (1) Klafki W. a.a.O., 89

(2) Burton J.K.; Lemke E.A.; Williams J.R.: Transfer Effects as a Function of Variety of Method and Ability Level in Elementary Mathematics. In: Journal f.Research in Mathematics Educ. 1975 (6) 2, 228f

Zu vergleichbaren Ergebnissen kommt auch McMurray N.E.: The Effects of four Instructional Strategies on the Learning of a Geometric Concept by Elementary and Middle School EMR Students. DAI 1974 (35A) 5931

lektive Momente nach sich) verhältnismäßig eindeutig bestimmbar sind, beinhaltet Förderung zwei Aspekte:

- Förderung als Ausgleich von Entwicklungs- und Erfahrungsdifferenzen oder
- Förderung als Verstärken der spezifischen, individuellen Fähigkeiten.

Die Unsicherheit im Hinblick auf die Ziele und Differenzierungsabsichten im Mathematikunterricht der Orientierungsstufe liegt u.a. im Fehlen einer praktikablen Theorie dieser Stufe. So stellt RAUSCHENBERGER fest[1]:

> "Forschungsprojekte im Bereich einer Schulstufe können nur aufgrund einer umfassenden Theorie dieser Stufe in Angriff genommen werden. Eine solche Theorie hätte unter Berücksichtigung soziologischer, psychologischer und didaktischer Befunde einen schulpädagogischen Entwurf zu entwickeln, der die allgemeinen Funktionen und Aufgaben der betreffenden Stufe darstellen könnte, und zwar so, daß die konkreten Fragen, etwa über Organisation und Curriculum, zumindest im Duktus erkennbar würden."

Da der Zusammenhang des Differenzierungsproblems mit einer didaktischen bzw. schultheoretischen Gesamttheorie weitgehend unbearbeitet blieb, richteten sich die Differenzierungsdiskussionen sehr oft nur auf die Abgrenzung bestmöglicher Organisationsformen.

> "Die Unsicherheit, worum es bei aller Differenzierung gehe und welches die Kriterien der Differenzierung sein müßten, ist ohne tiefergehende theoretische Erörterung nicht zu beheben. Sie hängt zusammen mit der Unsicherheit gegenüber dem Begriff Lernleistung und dessen Konkretisierung." (2)

Unter diesen Einschränkungen soll das vorliegende Papier auch nur als ein Diskussionsbeitrag verstanden werden.

Das Mehrwegmodell ist als eine Alternative zur üblichen Fachleistungsdifferenzierung im Mathematikunterricht anzusehen. Es orientiert sich an den individuellen Fähigkei-

---

Anmerkungen: (1) Rauschenberger H.: Funktion und Aufgabe der Orientierungsstufe. In: Ziegenspeck a.a.O., 349

(2) Rauschenberger, a.a.O., 359

ten und Stärken der Schüler und versucht, mittels verschiedener didaktischer Wege darauf einzugehen. Darüber hinaus können die Handlungsmöglichkeiten des Lehrers besonders bei einer flexiblen (Binnen-) Differenzierung, aber auch bei einer äußeren Differenzierung erweitert werden.(1)

Das Modell entstand aus zwei Erkenntnissen,
- daß sich die derzeitige Differenzierungspraxis im Mathematikunterricht an einem zu engen Fachleistungsbegriff orientiert und gleichzeitig diese Fachleistung als Differenzierungskriterium denkbar ungeeignet ist(2),
- und daß die Einseitigkeit der vorliegenden Unterrichtsmaterialien zum Mathematikunterricht der Orientierungsstufe eine flexible Differenzierung unmöglich macht.

Diagnosehilfen und darauf abgestimmte curriculare Mehrwegmodelle sollen von einer Arbeitsgruppe des IDM Bielefeld in enger Kooperation mit Didaktikern und Lehrergruppen entwickelt werden.

Anmerkungen: (1) "Schülergruppen, die nach einem Kriterium (z.B. der manifesten Schulleistung) homogen sind, sind heterogen in anderer Hinsicht," aus Prell S. et al. a.a.O., 119.- Auch Schüler in Niveaugruppen nach einer äußeren Differenzierung bedürfen der individuellen Förderung, da nur Differenzierung nach mehreren Kriterien sinnvoll und möglich ist.

(2) vgl. dazu die Diskussion und Kritik der Differenzierung nach Fachleistungen u.a. In: Roeder P.M., Treumann K.: Dimensionen der Schulleistung - Gutachten und Studien der Bildungskommission 21/1 und 21/2. Stuttgart 1974

TASK ANALYSIS IN INSTRUCTIONAL DESIGN: SOME CASES FROM MATHEMATICS [1)]

Lauren B. Resnick

This paper takes as its general theme the actual and potential role of task analysis, particularly information-processing analysis, in instructional theory and instructional design. Some definitions are needed to make this opening statement sensible. The term instruction is used here in its most general sense to refer to any set of environmental conditions that are deliberately arranged to foster increases in competence. Instruction thus includes demonstrating, telling, and explaining, but it equally includes physical arrangements, structure of presented material, sequences of task demands, and responses to the learner's actions. A theory of instruction, therefore, must concern itself with the relation between any modifications in the learning environment and resultant changes in competence. When the competence with which we are concerned is intellectual, development of a theory of instruction requires a description of states of intellectual competence, and ultimately, of relations between these states and manipulations of the learning environment.

In developing a theory of instruction for intellectual or cognitive domains, task analysis is central. I mean by task analysis the study of complex performances so as to reveal the psychological processes involved. These analyses translate "subject-matter" descriptions into psychological descriptions of behavior. They provide psychologically rich

---

1) A more extended discussion of this topic, including background material on other approaches to task analysis in mathematics will appear in David Klahr (Ed.), Cognition and Instruction. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, in press. The article is a reprint from that book by kind permission of the author, the editor, and the publisher.

descriptions of intellectual competence and are thus critical in bringing the constructs of psychology to bear on instructional design.

Psychological analysis of complex tasks is not a new idea. Task analyses are performed, although not usually under that name, in virtually all psychological investigations of cognitive activity. Whenever performances are analyzed into components - for experimental, interpretive, or theoretical purposes - task analysis of some kind is involved. Although the study of complex cognitive tasks has never dominated empirical psychology, significant occasions exist in which psychologists have turned their attention to such tasks. Not all have been instructional in intent but several important attempts bear examination because they have substantially influenced instructional theory or practice, or because, considered with instructional questions in mind, they offer insight into the possible nature of a theory of instruction based on cognitive psychology.

Because task analysis is pervasive in psychological research, delineating the scope of its usefulness is important when instructional concerns are central. Several criteria can be used to evaluate the potential contribution to instruction of different approaches to the psychological analysis of tasks. Four such criteria seem particularly important:

Instructional relevance. Are the tasks analyzed ones we want to teach? That is, are the tasks studied because of their instructional or general social relevance, or simply because they are easy to study, have a history of past research that makes results easy to interpret, or are especially suited to elucidating a point of theory? The criterion of instructional relevance implies that most tasks analyzed will be complex relative to many of the laboratory tasks that experimental psychologists find useful when pursuing non-instructional questions.

Psychological formulation. Does the analysis yield descrip-

tions of the task in terms of processes or basic units recognized by the psychological research community? Task analysis is means of bringing complex tasks, which have generally resisted good experimental analysis, into contact with the concepts, methods, and theories of psychology. Thus, while the starting point for instructional task analysis is prescribed by social decisions - what is important to teach - the outcomes of such analysis, the terms used in breaking apart complex performances, must be determined by the state of theory and knowledge in psychology.

It is not always easy to fulfill both these criteria at once; instructional relevance is defined in terms different from those which psychological researchers use in building their theories. Nevertheless, it is important to try to analyze instructional tasks in terms that contact the current body of knowledge and constructs in psychology so that instructional practice can profit from scientific findings as they exist and as they develop.

Instructability. Because our concern here is with task analysis as an aid to instruction, an obvious question is whether the results of a particular analysis are useable in instructional practice. In other words, does the task analysis reveal elements of the task that lend themselves to instruction, i.e., that are "instructable?" It is the function of task analysis to examine complex performances and display in them a substructure that is teachable - either through direct instruction in the components, or by practice in tasks that call upon the same or related processes.

Recognition of stages of competence. Does the task analysis recognize a distinction between early and later forms of competence? Analyses for instructional purposes cannot just describe the expert's performance (although such description will almost always be a part of such analyses). They must also describe performance characteristics of novices and attempt to discover or point to key differences between

novices and experts, suggesting thereby ways of arranging experiences that will help novices become experts. Instructional task analysis, in other words, should elucidate the relation between activity during learning and competence that results from learning. It should suggest ways of organizing knowledge to assist in acquisition, recognizing that this organization may differ from organization that are most efficient for expert use of that knowledge.

In summary, four criteria can be applied in assessing the contributions of psychological task analyses to instruction: (a) instructional relevance, (b) psychological formulation, (c) instructability, and (d) recognition of stages of competence. I shall examine several prominent approaches to the psychological analysis of complex tasks and consider their contributions to instruction in light of these criteria. I begin with some important past efforts to describe intellectual competence in psychological terms, and then turn to current information-processing approaches to task analysis. In order to make the domain of the paper manageable, discussion is limited to analysis of mathematics tasks. The work discussed, however, does not exhaust task analysis efforts in mathematics. Rather, it highlights certain cases that have considerably influenced psychology or instruction, or both, and that form landmarks in whatever might today be written of the history and current status of this branch of instructional psychology.

1. A SELECTIVE HISTORY OF TASK ANALYSIS

I will discuss first the work of three predecessors of modern information-processing task analysis, in each case using work on mathematics as the substantive example. These are: (a) work in the associationist/behaviorist tradition (Thorndike, Gagné); (b) work of the Gestalt school (especially Max Wertheimer); and (c) the Piagetian task analyses. Both substantively and methodologically, the approaches of these groups to task analysis reflect differences in their

theoretical positions, differences which in turn affect the kinds of contributions that each can make to instruction.

1.1 The Associationist/Behaviorist Tradition

Thorndike's analyses in terms of S-R bonds. In the early part of this century, experimental and educational psychology were closely allied. Many of the major psychologists of the period up to about 1930 were actively engaged in both laboratory research and applied research, some of it relevant to instructional practice. One of the foremost of these was Edward L. Thorndike. His work on The Psychology of Arithmetic, published in 1924, represents his attempt to translate the associationist theory of "laws of effect", which he himself was active in developing, into a set of prescriptions for teaching arithmetic. In the preface to the book, Thorndike states that there is now a "new point of view concerning the general process of learning. We now understand that learning is essentially the formation of connections or bonds between situations and responses, that the satisfyingness of the result is the force that forms them, and that habit rules in the realm of thought as truly and as fully as in the realm of action" (p.v). Based on this then widely agreed upon theory of psychological functioning, Thorndike proposed a pedagogy that has extensively influenced educational practice for many years.

Thorndike proposed the analysis of arithmetic tasks in terms of specific connections, or bonds, between sets of stimuli and responses, and the organization of instruction to maximize learning of both the individual bonds and the relations among them. His book began by discussing the general domains of arithmetic for which bonds must be formed - for example, the meanings of numbers, the nature of decimal notation, the ability to add, subtract, multiply, and divide, and the ability to apply various concepts and operations in solving problems. Thorndike then spent some fifty pages discussing the types of bonds that give precise meaning to this broad

definition of the domain of arithmetic. His analysis did not approach the level of individual stimulus-response pairs but remained on the more general level of connections between situations and sets of responses. Citing numerous examples, he argued that certain kinds of bonds taught in many of the standard textbooks of the day were misleading and should not be taught, while other helpful bonds were neglected in pedagogical practice. For example, verifying results of computations, learning addition and subtraction facts for fractions, and solving equations (even before algebra was added to the curriculum) were considered "desirable" bonds; while senseless drill in finding the lowest common denominator of fractions (when use of any common denominator would lead to solution of problems) and the posing of problems unrelated to real-life situations led to formation of "wasteful and harmful" bonds which made arithmetic confusing and unpleasant. Discussion of appropriate and inappropriate forms of measurement of the bonds or elements of arithmetic knowledge were also included. Thus, the book translated a standard school subject into terms - collections of bonds - that suggested applications of known laws of learning to the problems of instruction.

The laws of learning, and thus of pedagogy, were for Thorndike those dealing with such drill and practice as would strengthen the bonds. Questions such as amount of practice, under- and over-learning, and distribution of practice were considered. These are easily recognized as topics that have continued to occupy psychologists - although rarely directly in the context of school instruction - and that heavily though indirectly influence instructional practice even now. What is important about Thorndike's work, however, is that he was concerned not only with the laws of learning in general, but also with the laws of learning as applied to a particular discipline, arithmetic. He left the laboratory to engage in applied research, but brought with him the theory and to a large extent the methodology of the experimental laboratory. He thus began a tradition of experimental work

in instruction by psychologists. This tradition was interrupted for many years but is now being revived.

Gagné's hierarchies of learning sets. While Thorndike recognized the need for a theory of sequencing in his presentation of bonds as constituting the subject matter of arithmetic, he proposed no systematic theory of sequencing. In the decades following Thorndike's work, mathematics educators and educational psychologists (e.g., Brownell & Stretch, 1931; Hydle & Clapp, 1927) studied, with varying degrees of care and precision, the relative difficulty of different kinds of mathematical problems. They thus empirically, if not theoretically, extended Thorndike's work in instructional analysis and suggested that arranging tasks according to their order of difficulty would optimize learning, especially of the more difficult tasks. SKINNER's (1953) prescription for the use of "successive approximations" in instruction represented a refinenment of this basic idea. But neither Skinner nor his immediate interpreters proposed a systematic strategy for generating the order of successive approximations - i.e., the sequence of tasks in instruction. Not until the 1960s and GAGNE's (1962, 1968) work on hierarchies of learning did any organized theory of sequencing for instructional purposes appear within the behaviorist tradition.

Learning hierarchies are nested sets of tasks in which positive transfer from simpler to more complex tasks is expected. The "simpler" tasks in a hierarchy are not just easier to learn than the more complex; they are included in or are components of the more complex ones. Acquiring a complex capability, then, is a matter of cumulating capabilities through successive levels of complexity. Transfer occurs because simpler tasks are included in the more complex. Thus, learning hierarchies embody a special version of a "common elements" theory of transfer.

Widespread use of hierarchy analysis has begun among in-

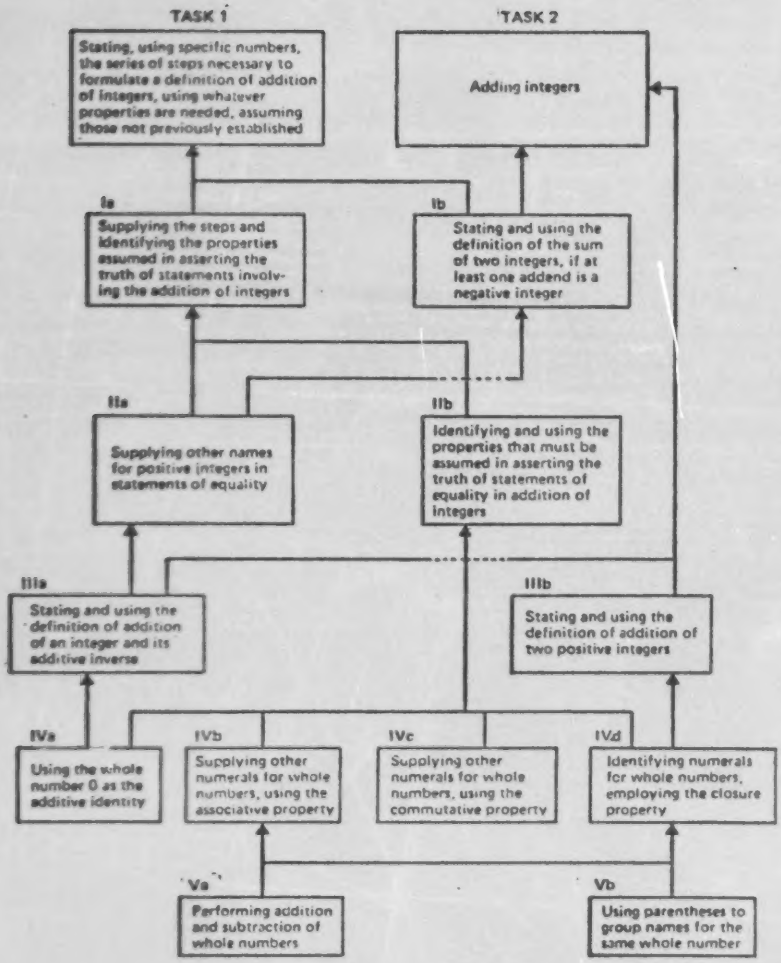

TASK 1
Stating, using specific numbers, the series of steps necessary to formulate a definition of addition of integers, using whatever properties are needed, assuming those not previously established
TASK 2
Adding integers
Ia
Supplying the steps and identifying the properties assumed in asserting the truth of statements involving the addition of integers
Ib
Stating and using the definition of the sum of two integers, if at least one addend is a negative integer
IIa
Supplying other names for positive integers in statements of equality
IIb
Identifying and using the properties that must be assumed in asserting the truth of statements of equality in addition of integers
IIIa
Stating and using the definition of addition of an integer and its additive inverse
IIIb
Stating and using the definition of addition of two positive integers
IVa
Using the whole number 0 as the additive identity
IVb
Supplying other numerals for whole numbers, using the associative property
IVc
Supplying other numerals for whole numbers, using the commutative property
IVd
Identifying numerals for whole numbers, employing the closure property
Va
Performing addition and subtraction of whole numbers
Vb
Using parentheses to group names for the same whole number

Figure 1. A learning hierarchy pertaining to the addition of integers. (From "Factors in Acquiring Knowledge of a Mathematical Task" by R. M. Gagné, J. R. Mayor, H. L. Garstens, and N. E. Paradise, Psychological Monographs, 1962, 76(Whole No. 526). Copyright 1962 by the American Psychological Association. Reprinted by permission.)

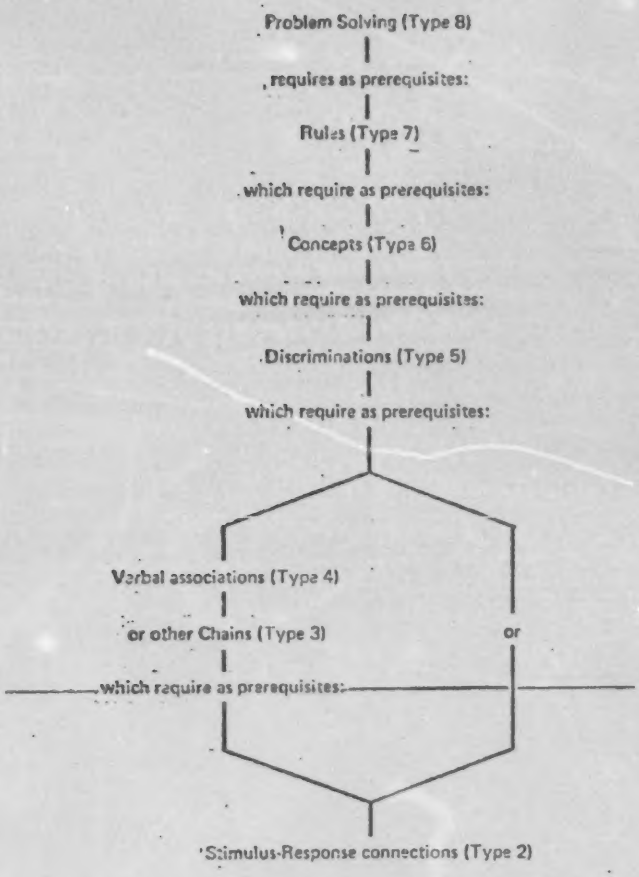


Figure 2. Gagné's hierarchy of types of learning. (From R. M. Gagné, The Conditions of Learning (2nd ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston. Reprinted by permission.)

structional designers, particularly in mathematics and science (see White, 1973). For the most part, the analyses have been of the kind Gagné originally described. Thus, hierarchies for instruction are typically generated by answering, for any particular task, the question, "What kind of capability would an individual have to possess to be able to perform this task successfully, were we to give him only instructions?" One or more subordinate tasks are specified in response to this question, and the question is applied in turn to the subordinate tasks themselves.

Figure 1 shows an example of one of Gagné's hierarchies. The tasks described in the top boxes are the targets for instruction. Lower boxes show successive layers of subordinate capabilities, simpler tasks whose mastery facilitates learning the more complex ones. Instruction begins with the lowest-level capabilities not already mastered and proceeds upward. The tasks at the low end of the hierarchy can further be analyzed, depending on assumptions about the learner's knowledge. The more elementary capabilities are assumed to involve more elementary types of learning. In other words, implicit in a complete learning hierarchy for tasks such as shown in Figure 1 is another hierarchy of "types of learning", progressing from simple S-R learning, through chaining and discrimination, to higher-level concept and rule learning, as shown in Figure 2. A more complex task such as problem solving would involve more concept and rule learning and would lead to the discovery of progressively higher-order generalizable rules. There is a kind of implicit process analysis involved in the method of hierarchy generation. Presumably, to answer the question that generates subordinate tasks, one must have some idea of what kinds of operations - mental or otherwise - an individual engages in when he performs the complex task. But this model of performance is left implicit in Gagné's work.

1.2 Gestalt Psychology and the Analysis of Mathematical Tasks

Gestalt psychology was an immigrant in America. In its first generation it spoke a language so unlike the rest of American psychology that it was barely listened to. Now, in a period when we speak easily of cognition and mental operations, the gestalt formulations take on more interest. Gestalt theory was fundamentally concerned with perception and particularly the apprehension of "structure". With respect to the complex processes of thinking, the concept of structure led to a concern with "understanding" or "insight", often accompanied by a visual representation of some kind. With respect to problem solving, the central concern was with the dynamics of "productive thinking". Several gestalt psychologists, particularly WERTHEIMER (1945/1959) and his students (Katona, 1940 ; Luchins & Luchins, 1970), attempted to apply the basic principles of gestalt interpretation to problems of instruction and, in particular, to the teaching of mathematics. It is reasonable to imagine that mathematics, especially geometry, was of particular interest to gestalt theorists because of its high degree of internal structure and its susceptibility to visual representation.

Wertheimer contrasted his theory of productive thinking both with traditional logic and with associationist descriptions of problem solving. Neither of these, he claimed, gave a complete picture of how new knowledge is produced by the individual. With respect to teaching, he was concerned that prevalent methods of teaching, with emphasis on practice and recall, produced "senseless combinations" rather than productive problem solving based on the structure of the problem.

WERTHEIMER's (1959) book, Productive Thinking, originally published in 1945, discussed work on several mathematics problems - for example, finding the area of a parallelogram, proving the equality of angles, Gauss's formula for the sum of a series, symmetry of oscillations, arithmetic calculations, and the sum of angles of a figure. Analysis of these

tasks, for Wertheimer, consisted of displaying the problem structure on which algorithms are based, rather than analyzing actual performance. Thus, for example, the problem of finding the area of a parallelogram was seen as a problem of "gap fitting" - too much on one side, too little on the other (see Figure 3). Once the gap was filled and a rectangle formed, a general principle for finding area could be applied. Recognizing the nature of the problem - the possibility of transforming the parallelogram into a rectangle - constituted for Wertheimer "understanding" or "insight". Solutions that followed from this understanding were for him true solutions, elegant ones. Those that "blindly" applied an algorithm, even if the algorithm should work, were "ugly".

Though Wertheimer talked little about general schemes for instruction, he implied the necessity of analyzing tasks into components, perceptual and structural, so that their nature in relation to the whole problem would be clear. Only when the true structures of problems were understood could principles derived from them be properly generalized. Whenever possible, the student should be left to discover both the problem and its solution. Instruction, if necessary, should proceed consistent with the internal structure of the problem and in the proper sequence, so that a true understanding leading to solution would be gained. Just how the understanding of components and their part-whole relations was to be taught was not made clear. Wertheimer suggested the introduction of exercises to focus students' attention on certain aspects of the problem structure, thereby increasing the likelihood of insight. He also spoke of operations involved in thinking - grouping, reorganizing, structuring - for which ways of teaching might be devised.

1.3 Piagetian Analyses

In discussing Piagetian task analysis, we will consider two quite distinct bodies of literature in succession: (a) Piaget's own work (and of others in Geneva), and (b) attempts - largely

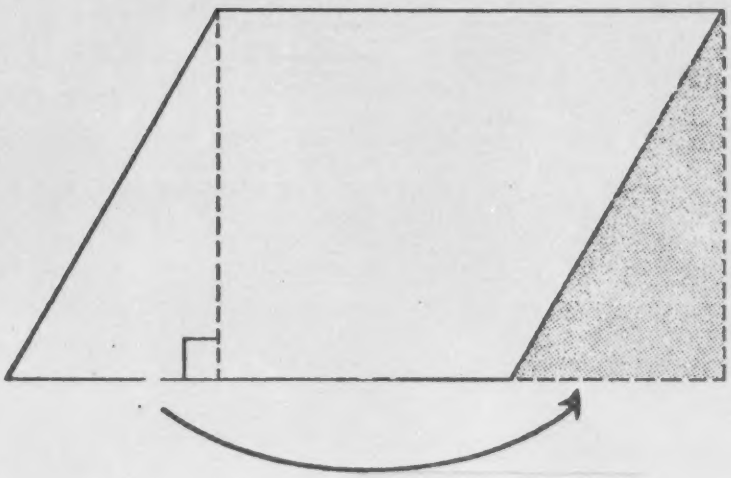


Figure 3. Wertheimer's area of a parallelogram problem.

by American and British psychologists - to isolate the specific concepts and process underlying performance on Piagetian tasks.

Genevan work. Much of Piaget's own work (on number, geometry, space, etc.) is heavily mathematical in orientation. It seeks to characterize cognitive development as a succession of logical structures commanded by individuals over time. Piaget's "clinical method" of research yields great quantities of raw process data - protocols of children's responses to various tasks and questions. The protocols are interpreted in terms of the child's "having" or "not having" structures of different kinds. Explanation of a task performance for Piaget consists of descriptions of the logical structures that underlie it, and of the structures that ontologically preceded and therefore in a sense "gave birth to" the current ones.

Piaget's tasks are chosen to exemplify logical structures that are assumed to be universal. Many turn out to involve mathematics, but not by and large the mathematics taught in school. One result has been considerable debate over whether the Piagetian tasks should become the basis of the school curriculum, whether they are teachable at all, and whether they set limits on what other mathematical content can be taught (for differing points of view on this matter, see Furth, 1970 ; Kamii, 1972; Kohlberg, 1968; and Rohwer, 1971). Although Piaget's work has not until recently been motivated by instructional concerns, others have tried to interpret his work for instruction. Such interpretation has often resulted in at least partially competing interpretations.

Piaget's most important contribution to task analysis is probably his pointing out, in compelling fashion, the important differences between children and adults in the way they approach certain tasks, the knowledge they bring to them, and the processes they have available. But his particular form of logical analysis leaves questionable the extent to which his descriptions elucidate the "psychologics" of be-

havior on these tasks, i.e., what people actually do. Certainly for psychologists accustomed to the explicit detail of information-processing analyses, Piaget's leaps from observations to inferences about logical structure are often difficult to follow.

Experimental analyses of Piaget's tasks. Much of the English-language research on Piaget has focused on locating specific concepts or component processes underlying the ability to perform well on particular tasks. Conservation tasks have been most heavily studied, classification tasks probably next most heavily, with relatively little study of tasks characteristic of the formal rather than concrete stages of operational thinking (see Glaser & Resnick, 1972).

Two basic strategies can be distinguished in this research. One varies the task in small ways to allow inferences about the kinds of cognitive processes being used. For example, SMEDSLUND (1964, 1967a, 1967b) presented double classification tasks with attributes covered or uncovered, labelled or perceptually presented. From performance on these variations, he concluded that processing was probably done at a symbolic rather than a perceptual level, that memory was involved, and that some kind of analytic mechanism might be involved in committing perceptions or symbols to memory.

The second research strategy is to instruct children in a concept or process hypothesized to underlie performance on some Piagetian tasks, and then to see whether they thereby become able to perform the task. Examples are GELMAN's (1969) training of conservation by teaching discrimination of length, density, and number; and BEARISON's (1969) induction of conservation by training in equal-unit measurement of liquid quantity. Of the two approaches, the second is more relevant to the present context, because the strategy of instruction demands an analysis in terms of instructable components.

1.4 Assessment of the Approaches with Reference to Instruction

How do these past approaches to task analysis match the criteria outlined for instructional relevance? To what extent does each address itself to tasks of instructional interest? To what extent do the terms of analysis provide a link to the main body of psychological theory and knowledge? Are instructable units identified? Do the analyses distinguish usefully between performance of learners and of experts?

Instructional relevance. With respect to the choice of tasks, only Thorndike and Gagné show a clear instructional orientation. Their tasks are drawn from school curricula, and where formal validation studies of their analyses occur, they are to a large extent based on the effectiveness of actual instruction in the units identified (e.g., Gagné, Mayor, Garstens, & Paradise, 1962). Wertheimer and the others of the Gestalt school analyze a few tasks drawn from mathematics, but make no attempt to analyze a whole range of subject matter. Further, despite some discussion of productive thinking as a generalized phenomenon of educational concern, there is no analysis of it as such in Wertheimer's work. Wertheimer probably chose tasks from mathematics that would best lend themselves to analysis in terms of perceptual "Gestalten" rather than selecting those of particular importance to instruction. On the criterion of types of tasks analyzed, Piaget's work is even less directly relevant to instruction. There is, in fact, serious question whether the tasks he has studied ought to be the objects of instruction, because they are psychological "indicators" of general cognitive status rather than socially important tasks, and because they appear to be acquired in the course of development, at least in Western and certain urbanized cultures, without formal schooling (Glaser & Resnick, 1972). It may be, however, that formal operations need to be taught explicity, because it is by no means clear that formal operational thinking is universally acquired (Neimark, 1975).

Psychological formulation. Each approach addresses well the analysis of complex tasks in terms of the fundamental psychological constructs relevant to their own times and theories. Thus, Thorndike's analyses describe arithmetic in terms of the basic psychological unit of then current theory, the associationist bond, and thus suggest specific pedagogical practices drawn from known principles of learning. Gagné's analyses interpret instructional tasks in terms of behavioral learning psychology: transfer, generalization, and so forth. His concern for the learning of "higher processes" such as rules and principles suggests some concern shared with cognitive psychology, but basic cognitive processes such as memory and perception are alluded to only as general abilities assumed to be neither instructable nor further analyzable. Wertheimer's analyses of mathematical tasks explicitly indicate how gestalt field theory would interpret problem solving and learning in these domains. Finally, Piaget's analyses, like Wertheimer's, attempt to show that performance on complex tasks can be interpreted in terms of underlying structures. For Piaget and Wertheimer, explication of the structures constitutes psychological explanation of the performance. Both are concerned with characterizing the broad outlines of cognitive structures rather than with detailing the processes involved in building or using these structures. Only in the experimental analyses of Piagetian tasks do we begin to find attempts to interpret performance more explicitly, that is, in information-processing terms.

Instructability. With respect to the criterion of instructability, Thorndike and Gagné are directly on target. Their aim in task analysis is to facilitate instruction, and the bonds or subordinate capabilities identified are quite clearly described as instructable components. Wertheimer is more difficult to assess with respect to this criterion. His analyses are specific to particular tasks. They do display the basic structure of each task and therefore quite directly suggest ways of teaching that are likely to produce maximum

understanding, transfer, and elegance of solution. But there are no general units identified which would be useful across a number of tasks. Piaget's own analyses involve no identification of instructable units. However, a review of studies involving instruction in Piagetian tasks (Glaser & Resnick, 1972) suggests that Piagetian concepts are indeed instructable, or at least lend themselves to analysis into certain prerequisite skills which may be instructable. The studies also suggest how delicate the process of task analysis and instruction is for tasks of any psychological complexity. It is necessary both to identify the appropriate underlying processes or concepts and to find effective ways of teaching them. Identifying one underlying concept will rarely suffice for full success in instructional efforts because there may be several abilities which must be combined, and the absence of any one may lead to failure to learn the target task. Further, "instruction" itself is a very delicate matter. No rules suggest how to construct situations that will convey the concepts or processes to be taught in a clear way. Even with an appropriate task analysis, the mapping from identified components to instructional strategies remains very much a matter of artful development.

Recognition of stages of competence. Finally, we turn to the novice-expert distinction, the criterion of recognition of stages of competence. On this matter Thorndike is not very explicit. He recognizes a need for sequencing instruction scientifically, but offers no psychological theory as to how to proceed. Indeed, the impression left is that the difference between novices and experts lies solely in how many bonds have been learned and how well practiced these are. That there may be important differences in the organization of knowledge for novices and experts is at best only hinted, and not seriously explored. Gagné's particular contribution within the behavioral perspective is a practical method for gen-

erating sequences of instructable tasks. In his general notion of transfer - inclusion of simple tasks in more complex ones - Gagné offers a strong suggestion for how to organize instruction for purposes of acquiring higher-order knowledge and skills. Thus, at a certain level, the criterion of recognizing and dealing with differences between novices and experts is explicitly met in learning hierarchy analyses. Wertheimer's analyses, by contrast, attend not at all to the distinction between novices and experts. The implicit assumption is that behavior in accord with good structural principles is "native" and has simply been stamped out by the drill orientation of schools.

Piaget, of course, is particularly attuned to changes in the structures available at different stages of intellectual development. In fact, with respect to instruction, Piaget's largest contribution is very possibly the identification of substantive changes in competence in the course of development. In Piaget's work it is impossible to ignore differences between performance strategies of novices and experts - whether or not we find his particular analyses convincing or accept his (partially nativist) explanation of how these changes occur. By contrast, the experimental or neo-Piagetian work is uneven on this criterion. For the most part, these studies investigate single tasks and look for competence versus incompetence rather than for stages or transformations of competence. There are a few exceptions, largely in recent attempts to interpret changes in performance on Piagetian tasks in terms of information-processing constructs (see Klahr, in press). Investigators have attempted to analyze sequences of Piagetian tasks so that adding one or two simple processes to an individual's repertoire, or modification of extant processes, can be shown to account for successively more complex performances on the Piagetian tasks. This work takes "information processing" as its theoretical orientation and makes heavy use of comput-

er simulation strategies for formal analyses. It thus forms a useful bridge to the second part of this paper, which is concerned specifically with the present and potential role of information-processing task analysis in instructional design.

2. INFORMATION-PROCESSING ANALYSES FOR INSTRUCTIONAL PURPOSES

A major branch of cognitive psychology today carries the label "information processing". As is often the case with an emerging branch of study, it is easier to point to examples of information-processing research than to give a complete or consensual definition of it. Nevertheless, psychologists working in this area tend to share certain assumptions and research strategies.

Information-processing studies attempt to account for performance on cognitive tasks in terms of actions (internal or external) that take place in a temporally ordered flow. A distinction is generally drawn between data, or information, and operations on data, or processes. Thus, the concern of information-processing psychology is with how humans act upon (process) data (information). Frequently, but not universally, information-processing models for cognitive tasks are expressed as "programs" for performance of particular tasks. These are often formalized as computer programs whose theoretical validity is judged by their ability to simulate actual human performance.

Most information-processing theories and models find it useful to characterize the human mind in terms of the way information is stored, accessed, and operated upon. Distinctions are made among different kinds or "levels" of memory. While the details and labels vary, most theories distinguish between a sensory intake register of

some kind through which information from the environment enters the system, a working memory (sometimes called short-term or intermediate-term memory) in which processing occurs and a long-term (semantic) memory in which everything one knows is stored, probably permanently. Within this general structure working memory is pivotal. It is only by being processed in working memory that material from the external environment can enter the individual's long-term store of knowledge, and it is only by entering working memory that information from the long-term store can be accessed and used in the course of thinking. Processing in working memory is usually assumed to be serial - one action at a time. Further, working memory is considered to have a limited number of "slots" that can be filled, so that it is only by rehearsing or by "chunking" material into larger units (so that a body of interrelated information takes up a single slot) that loss of information from working memory can be avoided.

Information-processing analyses of instructional tasks share these general assumptions as well as a body of research methods developed for testing the validity of models of cognitive performance. Information-processing analyses are clearly distinguished from behaviorist ones (Thorndike and Gagné in the present case) by their explicit attempts to describe internal processing. They differ from the cognitivist gestalt and Piagetian positions in their attempts to describe the actual flow of performance - to translate "restructuring" or "logical operations" into temporally organized sequences of actions.

In characterizing information-processing analyses of complex tasks, it is useful to distinguish between rational and empirical analyses. Rational analyses are descriptions of "idealized" performances - that is, performances that succeed in responding to task demands, often in highly efficient ways, but not necessarily in the ways in which

humans actually perform the tasks. Work in artificial intelligence can be considered a form of rational task analysis which is today being applied to increasingly complex kinds of tasks. So can some much less ambitious analyses of simple tasks, some of which are discussed below. Empirical task analyses are based on interpretation of the data (errors, latencies, self-reports, eye or hand movements, etc.) from human performance of a task; the aim of such analyses is to develop a description (model) of processes that would account for those data. In practice, rational and empirical analyses are rarely sharply separated. Rational analyses, for example, may provide the starting point for empirical data collection, leading to an iterative process in which successively closer matches to human performance models are made. Nevertheless, the distinction is a useful one in considering the kinds of investment in information-processing analyses that will be most valuable for instruction.

The remainder of this paper considers information-processing analyses of several of these kinds. I describe first some of our work in rational process analysis, work that was explicitly concerned with instructional-design requirements. Next, I describe some empirical analyses of the same kinds of relatively simple tasks, and consider the relation between rational and empirical analysis for instructional purposes. In a final section, I consider the problem of more complex tasks - problem solving, reasoning, tasks that we use as measures of "intelligence" and aptitude - and what the role of formal simulations and empirically studied information process models might be in such domains.

2.1 Rational Task Analysis for Curriculum Design

Rational task analysis can be defined as an attempt to specify processes or procedures that would be used in the highly efficient performance of some task. The result is

a detailed description of an "idealized" performance - one that solves the problem in minimal moves, does little "backtracking", makes few or no errors. Typically, a rational task analysis is derived from the structure of the subject matter and makes few explicit assumptions about the limitations of human memory capacity or perceptual encoding processes. In many cases, informal rational task analysis of this kind can serve as a way of prescribing what to teach (i.e., teach children to perform the processes laid out in the analyses), and instructional effectiveness serves as a partial validation of the analysis.

To convey the flavor and intent of rational process analysis as applied to instruction, I will describe in some detail part of our own early work on simple arithmetic tasks. The work initially grew out of an attempt to apply learning hierarchy theory to the problem of designing a preschool and kindergarten mathematics curriculum. We found it necessary, in order to secure agreement among our own staff on the probable ordering of tasks, to introduce a method in which the processes hypothesized to be involved in a particular task performance were explicitly laid out (see Resnick, Wang, & Kaplan, 1973). Figures 4 and 5 show examples of the analyses that resulted. The top box in each figure shows the task being analyzed, the entry above the line describing the presented stimulus and the entry below the line the expected response. The second row in each figure shows a hypothesized sequence of behaviors engaged in as the presented task is performed. Arrows indicate a temporally organized procedure or routine. The lower portions of the charts identify capabilities that are thought to be either necessary to performance (i.e., prerequisite to) or helpful in learning (i.e., propadeutic to) the main task. The identified prerequisite and propadeutic tasks were used to build hierarchies of objectives that formed the basis of a curriculum.

At the outset, the process analyses functioned as aids in

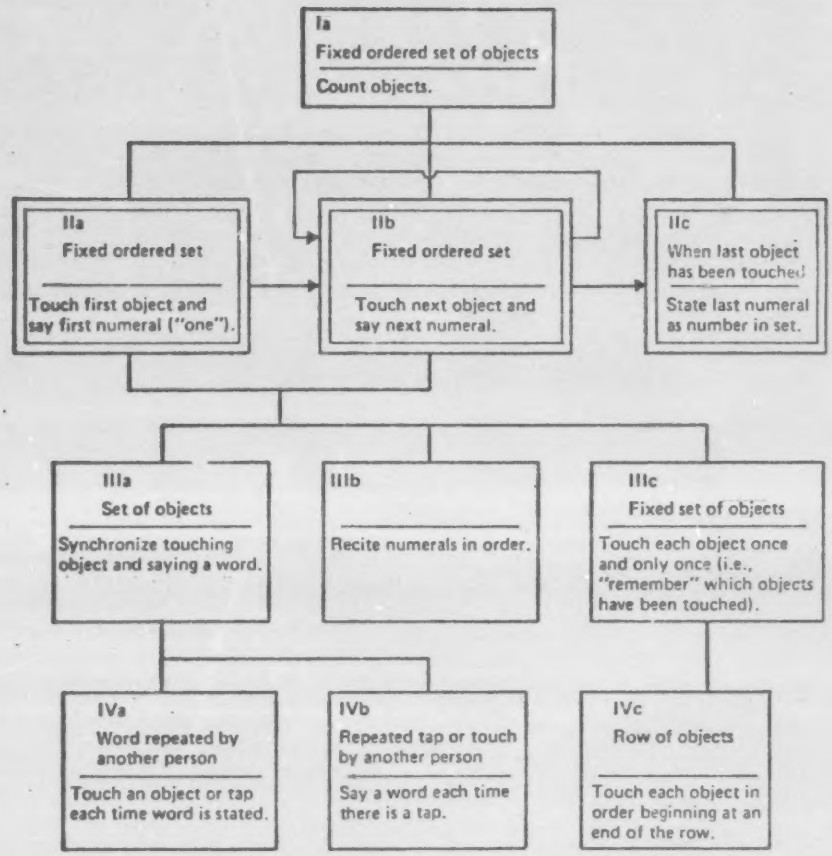

Ia
Fixed ordered set of objects
Count objects.
IIa
Fixed ordered set
Touch first object and say first numeral ("one").
IIb
Fixed ordered set
Touch next object and say next numeral.
IIc
When last object has been touched
State last numeral as number in set.
IIIa
Set of objects
Synchronize touching object and saying a word.
IIIb
Recite numerals in order.
IIIc
Fixed set of objects
Touch each object once and only once (i.e., "remember" which objects have been touched).
IVa
Word repeated by another person
Touch an object or tap each time word is stated.
IVb
Repeated tap or touch by another person
Say a word each time there is a tap.
IVc
Row of objects
Touch each object in order beginning at an end of the row.

Figure 4. Analysis of Objective 1-2:C, "Given a fixed ordered set of objects, the child can count the objects." (From "Task Analysis in Curriculum Design: A Hierarchically Sequenced Introductory Mathematics Curriculum" by L. B. Resnick, M. C. Wang, and J. Kaplan, Journal of Applied Behavior Analysis, 1973, 6, 679-710. Copyright 1973 by the Society for Applied Behavior Analysis. Reprinted by permission.)

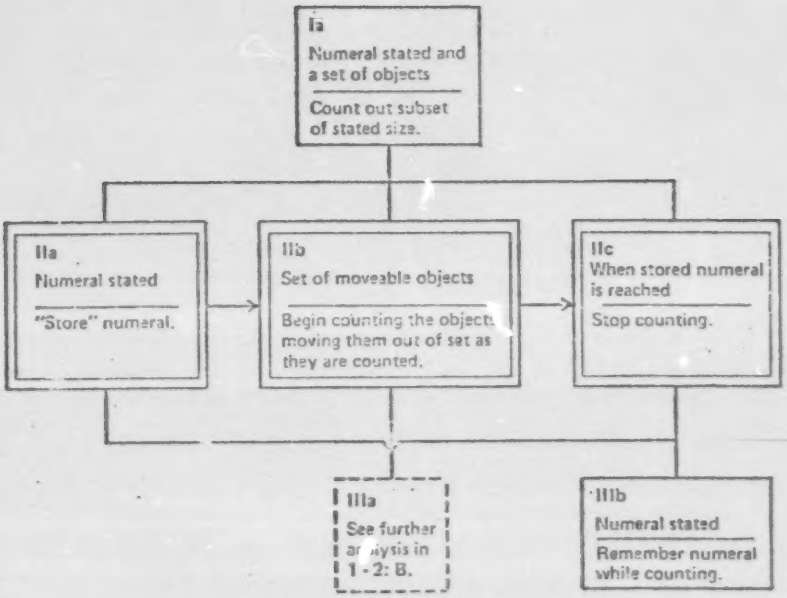


Figure 5. Analysis of Objective 1-2:E, "Given a numeral stated and a set of objects, the child can count out a subset of stated size." (From "Task Analysis in Curriculum Design: A Hierarchically Sequenced Introductory Mathematics Curriculum" by L. B. Resnick, M. C. Wang, and J. Kaplan, Journal of Applied Behavior Analysis, 1973, 6, 679-710. Copyright 1973 by the Society for Applied Behavior Analysis. Reprinted by permission.)

developing prescriptions for instruction. We carried out the kind of research that seemed most directly relevant to that prescriptive function. That is, we looked at the extent to which the analyses generated valid task sequences, sequences which aided learning of the most complex tasks in the set. Two research strategies were involved. First, we conducted scaling studies. In these studies, tests on a number of tasks were given to a sample of the children prior to instruction, and the results were evaluated for the extent to which the tests formed a Guttman scale in accord with the predicted prerequisite relations (e.g., Wang, 1973; Wang, Resnick, & Boozer, 1971). A good approximation to a Guttman scale implied strong prerequisite relations among the tasks - relations that specified optimal teaching orders. A second set of studies (Caruso & Resnick, 1971; Resnick, Siegel, & Kresh, 1971) involved more direct assessment of transfer relations among small sets of tasks. Tasks in a small hierarchy were taught in simple-to-complex and complex-to-simple orders. We then looked at transfer effects on trials to criterion and related measures. These studies showed that teaching in hierarchical sequence was the best way of assuring that most or all of the children in a group learned all the objectives. For the minority who were capable of learning the more complex objectives without intervening instruction, however, "skipping" of prerequisites was a faster way to learn. What these children apparently did was to acquire the "prerequisites" in the course of learning the most complex tasks. An important instructional question raised by these results is whether we can match instructional strategies to individuals' relative ability to learn on their own - i.e., without going through direct instruction in all of the steps of a hierarchy. Before we are likely to answer that question well, however, we will probably need more systematic theories than are now available of how learning occurs with minimal instruction (see Resnick & Glaser, in press).

The kind of task analysis used in these studies served to describe performance in temporally organized sequences and identify general information-processing abilities, such as perceptual processing (e.g., Figure 4, IIIc and IVc), memory (e.g., Figure 5, IIa and IIb), and temporal synchrony (e.g., Figure 4, IIIa), that are called on in performing a specific complex task. As information-processing models, however, the analyses were incomplete because they did not specify every step (for example, stop rules were not typically specified where recursive loops occurred), nor did they explicitly deal with overall control mechanisms or total memory load. In addition, they were not empirically verified as process analyses. Although many observations of performance were made, there was no attempt to match predicted or "ideal" performance against actual performances. The hierarchy tests confirmed the validity of the task sequencing decisions made on the basis of the analyses, but they did not necessarily confirm the details of the analyses. Performance strategies different from those in our analyses might have produced similar sequences of acquisition or transfer effects. Thus, while the scaling and transfer studies met instructional needs quite well, they did not constitute validations of the models' details. For this purpose, the strategies of empirical task analysis are needed.

2.2 Empirical Analyses of Specific Tasks

What can empirical analyses suggest about teaching specific tasks? An obvious possibility is that we might use process models of competent performance as direct specifications for what to teach. Such models of skilled performance are potentially powerful. However, these alone do not take into account the capabilities of the learner as he or she enters the instructional situation. I want to describe some experiments we have done that suggest a different way of looking at the relation between what is taught and how skilled performance proceeds. The experiments suggest that

what we teach children to do and how they perform a relatively short time after instruction are not identical - but neither are they unrelated. They suggest that children seek simplifying procedures that lead them to construct, or "invent", more efficient routines that might be quite difficult to teach directly.

Subtraction. In one study (Woods, Resnick, & Groen, 1975) we examined simple subtraction processes (e.g., 5 - 4 = ?) in second and fourth graders. The method was borrowed from Groen and others' work on simple addition processes (Groen & Parkman, 1972) and open-sentence equations (Groen & Poll, 1973). That is, we gave children a set of subtraction problems and collected response latencies. Five possible models for performing subtraction problems (of the form $m - n = ?$; with $0 < m \leq 9$, $0 \leq n < 9$) were hypothesized, and predicted response latencies for each problem for each performance model were worked out based on the number of steps that would be required according to the model.Regression analysis was then used to fit observed to predicted latency functions and thus select the model an individual child was using.

Of five models tested, two accounted for the performance of all but a few subjects:

Decrementing Model. Set a counter to m, decrease it n times, then "read" counter. For this model, latencies should rise as a function of the value of n, and the slope of the regression line should reflect the speed of each decrementing operation. This function is shown in Figure 6.

Choice Model. Depending on which has fewer steps, perform either the decrementing routine (previously described) or another in which a counter is set to n and is then incremented until the counter reading matches m. The number of increments is then "read" as the answer. For this model, it is necessary to assume a process of choosing whether to "increment

up" or "decrement down". We assume that the choice process takes the same amount of time regardless of the values of *m* and *n*. On this assumption, latencies should rise as a function of whichever is smaller, *n* or (*m* - *n*). This function is shown in Figure 7.

Individual data were analyzed first and a best-fit model selected for each child. Then children were grouped according to the model they fit, and the pooled data were analyzed. All fourth graders and most second graders were best fit by the choice model. It seems unlikely that the children had been directly taught the choice model for solving subtraction problems during their arithmetic training. The procedure would be difficult to communicate to 6- and 7-year-olds, and might confuse rather than enlighten children at their first exposure to subtraction. Most probably, the children had been taught initially to construct the *m* set (increment the counter *m* times), count out the *n* set (decrement *n* times), and then count ("read-out") the remainder. This algorithm is close to the one described as the decrementing model. The decrementing model is in fact derivable from the algorithm we assume is typically taught by simply dropping the steps of constructing the *m* set and counting the remainder. Thus, it seems reasonable that a child would develop the decrementing model quite quickly. The choice model, however, cannot be derived from the teaching algorithm in so direct a way. Instead, an invention (the possibility of counting up from *n*) must be made. This invention is probably based on observation of the relations between numbers in addition and subtraction over a large number of instances. Yet the invention appears to have been made as early as the end of second grade by most of the children.

Addition. In another study, Guy Groen and I are looking more directly at the relation between the algorithm taught and later performance. In the subtraction study we could

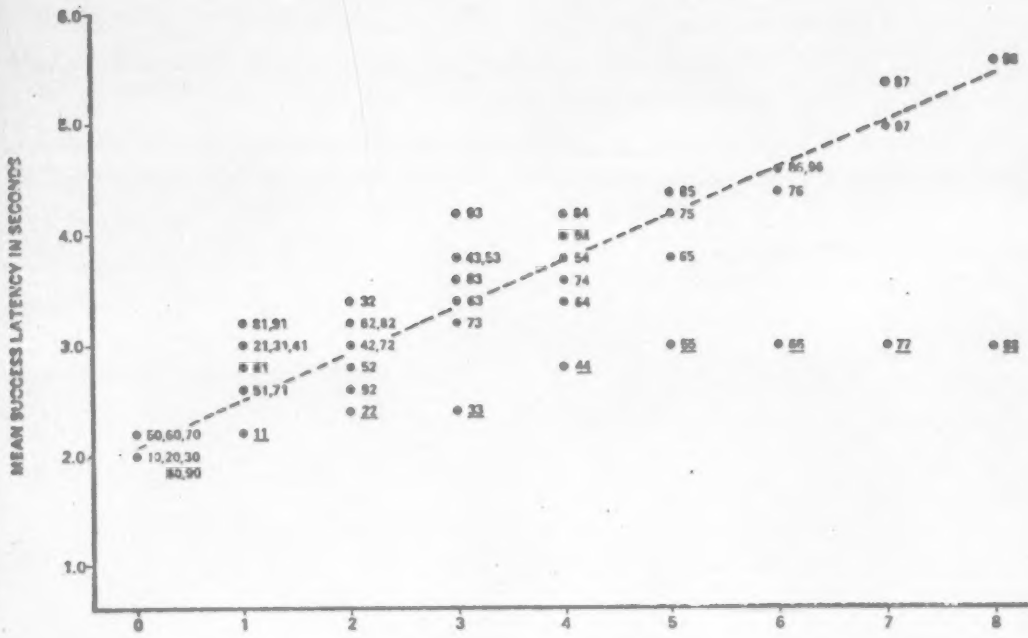


Figure 6. Plot of reaction times for second-graders solving subtraction problems of the form m - n = ?: Decrementing Model. Numbers beside solid dots denote actual problems (e.g., ●54, 65 signifies that problems 5 - 4 and 6 - 5 both had a mean success latency specified by the●). Underlined problems were omitted in the regression analysis. (From "An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction" by S. S. Woods, L. B. Resnick, and G. J. Groen, Journal of Educational Psychology, 1975, 67(1), 17-21. Copyright 1975 by the American Psychological Association. Reprinted by permission.)

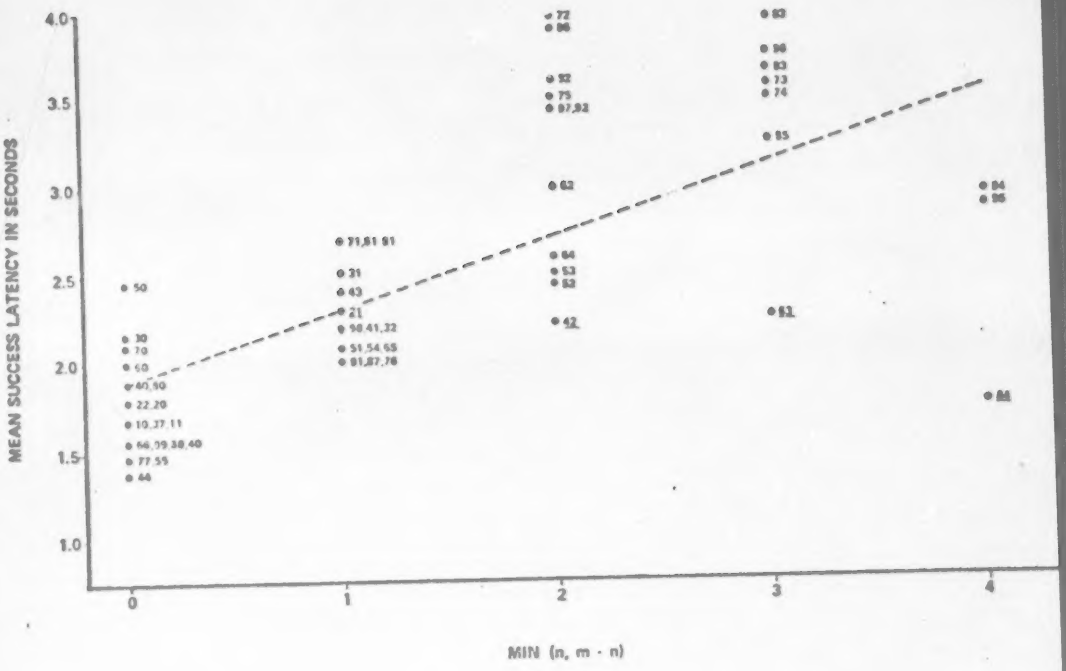


Figure 7. Plot of reaction times for second-graders solving subtraction problems: Choice Model. MIN (n, m-n) reads "the smaller of n and (m-n)". (From "An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction" by S. S. Woods, L. B. Resnick, and G. J. Groen, Journal of Educational Psychology, 1975, 67(1), 17-21. Copyright 1975 by the American Psychological Association. Reprinted by permission.)

only guess at what children had been taught, based on our general knowledge of elementary school practice. In the addition study, we controlled the teaching by doing it ourselves. We taught 4-year-olds to solve single-digit addition problems of the form $m+n = ?$ (where m and n ranged from 0 to 5) by using the following algorithm: (a) count out m blocks, (b) count out n blocks, (c) combine the subsets, and (d) count the combined set. We then kept the children coming back for about two practice sessions a week for many weeks. As soon as each child was performing the addition process smoothly using blocks, we took the blocks away and asked the children to give their answers on a device that allowed us to collect latency data. The children's typical response when blocks were removed was to begin counting out sets on their fingers. Eventually, however, most shifted to internal processing.

SUPPES and GROEN (1967) had earlier shown that by the end of the first grade, most children added using a choice-type model in which they set a counter to m or n, whichever was larger, and then incremented by the smaller of the two numbers. This is known as the min (minimum) model (because the latencies fit min $[m,n]$). A few children used a model of incrementing m times, then incrementing n more times, and then reading the counter. This is known as the sum model (latencies fit $[m+n]$). The sum model can be derived from the procedure we taught by simply dropping steps (c) and (d) of our algorithm, and it requires no choice. The min model, however, requires an invention based on the recognition that sums are the same regardless of the order in which numbers are added and that it is faster to increment by the smaller quantity.

For five of the six children whose data have been analyzed thus far, it is clear that by the final two test sessions the min model gave significant and "best" fit. In general, the trend over blocks of trials was for subjects' data to be fit well by the min model as soon as they stopped count-

ing overtly on most of the trials. It is as if these children discovered commutativity as soon as they were confident enough to stop counting on their fingers. In these studies, children are taught one routine derived from the subject matter. After some practice - but no direct instruction - they perform a different and more efficient routine. The efficiency is a result of fewer steps (not, apparently, faster performance of component operations), which in turn requires a choice or decision on the part of the child. A strictly algorithmic routine, in other words, is converted into another routine which turns out to solve the presented problem more efficiently.

WALLACE (Note 1) has reported a similar finding in a study of information-processing models of class inclusion. After training in the prerequisite skills as hypothesized on the basis of an information-processing analysis, subjects were presented a typical class inclusion task in which they were asked to tell, for example, "Which is more, the red ones or the triangles?" They had been taught to pass through the object array twice, each time quantifying the objects on one of the different value dimensions named and then comparing them to determine which was more. At the posttest administered immediately after training, some of the children were able to perform more efficiently by quantifying on the first pass objects having only one of the dimensions named by the experimenter. For example, Wallace presented a subject with eight triangles, seven of which were red and one green. Asked "Which is more, the red ones or the triangles?", one subject answered, "There's one green triangle and that makes it more triangles" (Wallace, Note 1). Because the set having only one of the named dimensions in the class inclusion task is usually the minor subset, this procedure quickly yields the answer. It seems likely that a phenomenon of this kind, that is, the transformation of algorithms by the learner, is more general than we have thought up to now. At least some process data that appear difficult to interpret when averaged over time

may show interpretable regularity when early and later phases of performance are examined separately.

Implications for instruction. What are the implications of findings of this kind for instruction? On the face of it, it would seem that we ought to abandon the algorithmic routines suggested by rational task analysis in favor of directly teaching the more environmentally responsive processes that appear to characterize even semi-skilled performance. We ought, in other words, to conclude that the initial rational analyses are wrong because they do not match skilled performance, and that therefore they should not be used in instruction. Rather, we should perform detailed empirical analyses of skilled performance on all of the tasks that a curriculum comprises, and teach directly the routines uncovered in the course of such analyses.

Such a conclusion, I believe, would be mistaken. It rests on the assumption that efficient instruction is necessarily direct instruction in skilled performance strategies, rather than instruction in routines that put learners in a good position to discover or invent efficient strategies for themselves. That is what the children did in the studies just reported. They learned a routine but then invented a more efficient performance for themselves. It seems reasonable to suppose - although empirical tests comparing different instructional strategies are needed to draw a strong conclusion - that the teaching routines were good ones, because they taught the specific skills in a way that called upon children's discovery and invention abilities.

2.3 Task Structure, Skilled Performance, and Teaching Routines

To put the case in its most general form, it would seem useful to think in terms of a "triangulation" between the structure of a task as defined by the subject matter, the

performance of skilled individuals on a task, and a teaching or acquisition routine that helps novices learn the task. There are three terms in this conceptualization; all three must stand in strong relation to each of the others - thus the image of triangulation. These relations are schematized in Figure 8. Most empirical information-processing analyses have been concerned with relations between the elements defining the base of the triangle - that is, with the relations between the structure of the subject matter, or "task environment" (A), and performance (C). Thus, most information-processing task analyses are state theories, describing performance on a given kind of task at a given point in learning or development, but not attempting to account for acquisition of the performance. The rational process analyses that we have developed in the course of our instructional work have been concerned primarily with the structure of the task (A) and an idealized routine that represents the subject matter well and thus prescribes a good teaching routine (B). Our validation studies have in effect been tests of the extent to which the teaching routines and sequences derived through these analyses succeeded in conveying the subject matter to learners. The preceding discussion has concerned the relation between teaching routines (B) and performance routines (C). Gaining understanding of the "transformation" processes that link these two routines is necessary to complete the triangulation that clearly relates information-processing models to instructional design.

According to this "triangulation," there are three criteria to be met in choosing a teaching routine:

1. It must adequately display the underlying structure of the subject matter.
2. It must be easy to demonstrate or teach.
3. It must capable of transformation into an efficient performance routine.

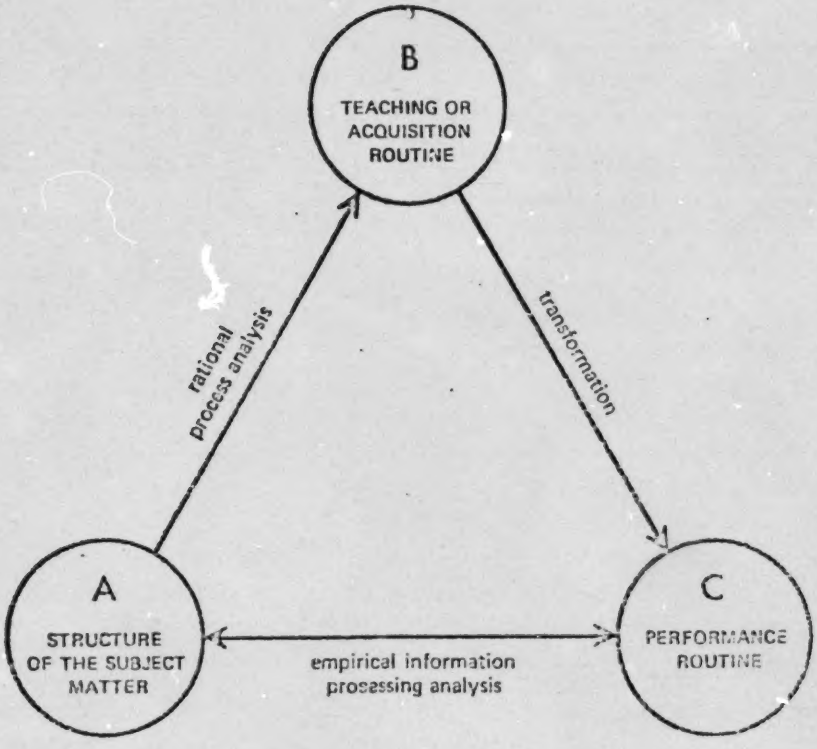


Figure 8. Relations between teaching routines, performance routines, and structure of subject matter.

The teaching routine, then, is designed to help facilitate acquisition. It provides the connecting link between the structure of the subject matter and skilled performance - which is often so elliptical as to obscure rather than reveal the basic structure of the task.

Teaching routines, in other words, are constructed specifically to aid acquisition. The design of teaching routines may require considerable artistry, and not all routines will be successful in meeting the criteria just laid out. Let us consider some examples. To begin with our own work, the addition routine Groen and I taught is an instance of the "union of sets" definition of addition. Thus, it is a mathematically "correct" procedure and represents the subject-matter structure clearly. The routine is also easy to demonstrate and to learn. Our 4-year-old subjects (who knew only how to count objects when they began the experiment) were performing addition virtually perfectly, using the blocks, after about a half hour of practice. The routine we taught is awkward and slow to perform, however. None of us would like to have to use it in our daily activities, and neither apparently did the 4-year-olds. Nevertheless, the data show that the routine is transformable - by a series of steps we can imagine but cannot for the moment document empirically - to the more efficient performance routine of the min model. Further, this performance routine exemplifies another aspect of the subject-matter structure, commutativity. Thus, the proposed triangulation is completed. A teaching routine derived by rational process analysis of the subject-matter structure is transformed to a performance routine that reflects an even more sophisticated definition of the subject matter.

The case is similar for the subtraction study. The routine that we presume was taught exemplified a partitioning-of-sets definition of subtraction. The performance routine derived by the children is not only more efficient; it also reflects a more sophisticated aspect of the subject-

matter structure, namely the complementary relation between addition and subtraction operations.

Not all teaching routines meet the criteria enumerated above. Some are awkward to teach; such would be the case, for example, were one to undertake to teach 4-year-olds the min model for addition. Others fail to display the subject-matter structure in a way that is transparent to children. This is true, for example, in the case of traditional algorithmic methods of teaching carrying and borrowing that do not display the underlying structure (base arithmetic and its notation) from which the routines are derived.

Sometimes instructional routines are developed in order to display the subject-matter structure but do not meet the transformability criterion - that is, they are not easily mapped onto a performance routine that is efficient and direct. An example of a performance routine that fails on the criterion of transformability is one that was proposed by BRUNER (1964) for teaching factoring of quadratic expressions. Bruner was successful in teaching third graders to perform the factoring operation by creating a "model" of the expression using blocks. As shown in Figure 9 (a), the large square is x units long and x wide, thus (x^2). The rod is x units long and one unit wide, thus (x). The small cube is 1 x 1, thus (1). As shown at the right of the figure (b), children can arrange these three elements in squares which will have equal factors - e.g., $(x + 1)(x + 1)$; $(x + 2)(x + 2)$ - and which can also be expressed as quadratics - e.g., $(x^2 + 2x + 1)$; $(x^2 + 4x + 4)$. Allowing children to manipulate the blocks may be excellent for displaying and promoting insight into the structure of the subject matter, but there appears to be no way to transform the square-arrangement routine to a factoring procedure used without the blocks.

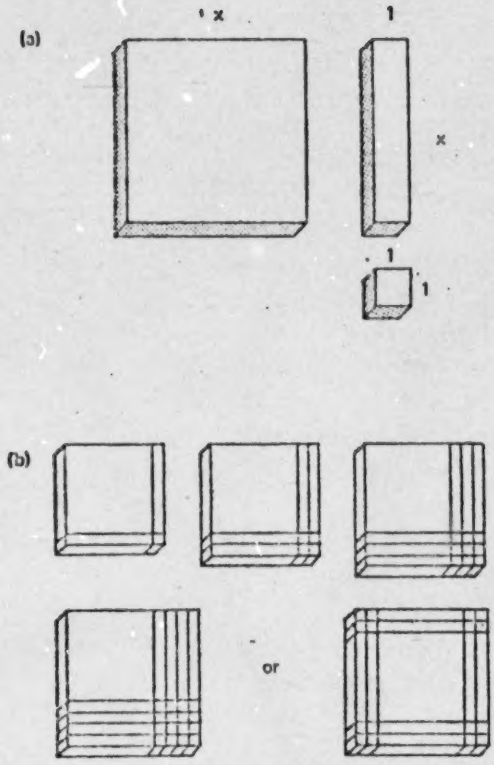


Figure 9. (a) Three components for quadratic constructions. (b) Squares of ever increasing size constructed with components. (From "Some Theorems on Instruction Illustrated with Reference to Mathematics" by J. S. Bruner, in E. R. Hilgard (Ed.), Theories of Learning and Instruction, The 63rd Yearbook of the NSSE (Part 1). Chicago: University of Chicago Press. Reprinted by permission.)

Certain other teaching routines in early mathematics do meet the transformability criterion while still representing the mathematical structure. For example, measurement can be taught as a process of dividing into equal units. WERTHEIMER (1945/1959) did this when he used division of a figure into squares as means of finding its area. BEARISON (1969), in a less widely known experiment, induced a generalized conservation concept by showing children how to count the number of 30-milliliter beakers of liquid that were poured into beakers of different sizes, and demonstrating the principle of conservation by pouring equal quantities of liquid into containers of different shapes. This generalized principle of measurement, exemplified in the liquid measurement procedure taught, produced conservation responses in tests of number, mass, length, and continuous and discontinuous area and quantity that lasted for at least six months. Similarly, the number base system (including carrying and borrowing) can be taught using blocks in sizes of one, ten, and one hundred, placed in units, tens, and hundreds columns, as in Figure 10 (cf. Dienes, 1966, 1967). With these blocks, carrying can be represented by trading or exchanging extra (i.e., more than nine) blocks in a column for a larger block that is placed in the next column. Such an exchange would be necessary for the bottom display in Figure 10 before the block display could be notated. A reverse exchange operation can be used to represent subtraction. In each of these cases, as the physical representation is dropped, a performance routine can be constructed which initially performs "as if" the representation were present, and then gradually becomes more abstracted from it. This is the kind of thing we believe occurred in our addition teaching experiment.

The general suggestion that I would like to draw from these observations is that most people - even quite young children - use environmental feedback to simplify performance routines. They do not accept the routines they are shown

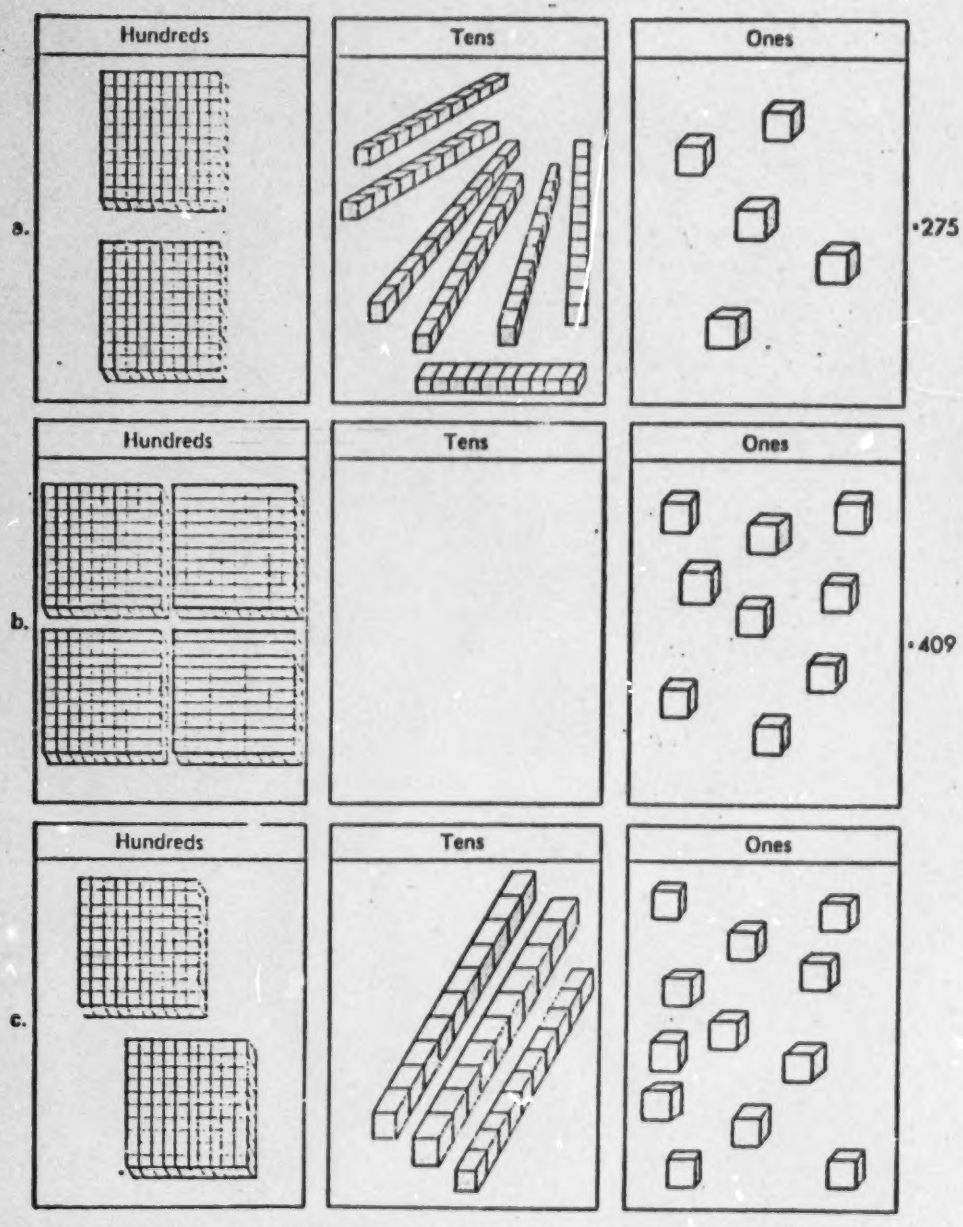


Figure 10. Block displays for notation problem. (From "Problem Solving and Intelligence" by L. B. Resnick and R. Glaser, in L. B. Resnick (Ed.), The Nature of Intelligence. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, in press.)

as "givens" but rather as starting points. They invent even when we teach them algorithms. One implication is that the traditional line between algorithmic and inventive teaching disappears. We are not faced so much with a choice between teaching by rules and teaching by discovery, as with a problem of finding teaching rules that will enhance the probability of discovery - rules that somehow invite simplification or combination with other rules. This way of thinking also draws attention to the extent to which we presently depend, in our normal instructional practices, on this kind of invention and discovery by learners. Our instruction is rarely complete, and rather than taking care to point out the simplifying and organizing principles that underlie what we teach, we often not only choose less than elegant instances but also expect learners to find the underlying principles for themselves. This suggests that differences in learning ability - often expressed as intelligence or aptitude - may in fact be differences in the amount of support individuals require in making the simplifying and organizing inventions that produce skilled performance. Some individuals will seek and find order in the most disordered presentations; most will do well if the presentations (i.e., the teaching routines) are good representations of underlying structures; still others may need explicit help in finding efficient strategies for performance.

2.4 Analyzing and Teaching Generalized "Learning-to-Learn" Abilities

People apparently invent even within the confines of algorithmic instruction of particular tasks. Nevertheless, as just suggested, individuals differ substantially in how good they are at these inventions. Thus, one appropriate concern for instruction is the possibility of teaching general strategies for invention and discovery -- strategies that will help learners to be less dependent on the instructor's elegance in presenting particular tasks. An interest

in teaching such general "learning-to-learn" abilities, as they are often called, has been widely expressed by educators and psychologists. But few successes have been reported, and there is little scientific basis at the present time for such instruction. As in the instruction of any other ability, the first step in teaching general learning abilities is developing a psychological description - a task analysis - of the competence sought. Such analyses are only now beginning to become available.

A growing number of information-processing analyses of problem-solving tasks of various kinds provide a potential basis for instruction. However, it is by no means evident, without further testing and experimentation, that analysis of skilled performance on complex problems can be directly translated into instructional interventions. One test of this possibility has been carried out recently by THOMAS HOLZMAN (1975). In an effort to determine the instructability of a generalized pattern detection skill, Holzman looked at an analysis of behavior on series completion tasks that had been carried out earlier by KOTOVSKY and SIMON (1973). The Kotovsky and Simon analysis identified three principal subroutines for discovering the pattern in letter-series completion tasks similar to those used on many intelligence tests. These were: (a) detecting the "period" of the pattern - i.e., the repeating units of a certain number of letters, such as three in the pattern abmcdmefm ... or four in the pattern defgefghfg ...; (b) determining the rule that generates each symbol in the period; and (c) testing the inferred rule to see if it holds for all the letters that have been presented. These subroutines in turn were shown to be dependent upon recognizing three basic relations between items in the series presented: identity (e.g., f to f); next in the alphabet (e.g., f to g); or backward next (e.g., h to g). These three relations exhaust those that were used in the Thurstone letter-series completion task (Thorndike & Thurstone, 1941) which the Kotovsky and

Simon study used as a basis, although a much more extended and complex list of relations could of course be used in generating series completion problems.

Based on the Kotovsky and Simon analysis, Holzman taught children from first through sixth grade the strategies for recognizing the three basic relations and for finding periods. Instruction in finding periods was done in such a way as to prevent extrapolation to other subroutines. Children trained in these relations and periodicity subroutines improved significantly on the letter-series completion task from pre- to posttest. They also improved significantly more than control children who simply took the pre- and posttest and did not practice the series completion task. Comparisons of particular types of errors for the training and control groups showed that the trained children improved significantly more than the controls where there were more difficult relations (e.g., next as apposed to identity) and on the generally more difficult problems. Control children showed a practice effect, due to experience with the test itself, which was limited largely to improvement on the most easily detectable relation (i.e., identity). This study suggests that as information-processing analyses succeed in identifying the processes underlying problem solution, these processes -- at least some of them - can be directly taught, and that individuals will then be able to apply them to solving relatively large classes of problems.

What possibilities exist for analyses of problem-solving abilities that are even more general than those Holzman found, and what might these yield as a basis for instruction that would truly generate learning-to-learn abilities? Robert Glaser and I have considered this question in another paper (Resnick & Glaser, in press) in which we describe several studies of invention behavior in mathematics and related tasks. We argue there that the processes involved in problem solving of certain kinds are probably the same

ones involved in learning in the absence of direct or complete instruction, and that instruction in those processes may constitute a means of increasing an individual's intelligence.

We have developed a model of problem solving in which three interacting phases are identified: (a) problem detection, in which the inapplicability of "usual routines" is noted and a problem or goal formulated; (b) feature scanning, in which the task environment (the external situation, which includes both physical and social features) is scanned for cues to appropriate responses; and (c) goal analysis, in which goals are successively reformulated, partly on the basis of external task cues, in order to yield soluble subgoals that contribute eventually to solution of the task as presented. A study by PELLEGRINO and SCHADLER (Note 2) has shown that requiring the subject to verbalize the goals of the problem and his or her strategies for solving it before making overt moves toward solution greatly enhances the likelihood of invention. Along similar lines, it seems likely that ways can be found to make individuals more conscious of the role of environmental cues in problem solving. Strategies of feature scanning and analysis may perhaps be taught that will enhance the likelihood of their noticing cues that prompt effective actions, while recognizing and somehow "deactivating" those that prompt ineffective actions. Extending this general argument of self-regulation as a major characteristic of successful learning and problem solving, RESNICK and BECK (in press) have suggested that a similar form of instruction in self-questioning and self-monitoring strategies might be an effective way of enhancing reading comprehension abilities.

The specific suggestions that can now be offered for instruction of generalized learning abilities are limited, because relatively little work has been done thus far on developing task analyses that characterize these general

processes in instructable terms. Rational analysis seems less likely to yield good suggestions for generalized abilities than for specific tasks; thus empirical task analyses seem to be called for. Further, the rigor of formal models seems especially important where the processes are little understood and the task environments loosely structured, as is often the case where problem solving and discovery are called for. Thus, with respect to this most important goal of instruction, it will probably be necessary to engage in the most costly and extended forms of task analysis, that is, those that are formally stated and empirically validated. To the extent that the analyses identify instructable processes, instructional experiments can serve as one of the major forms of empirical validation of the performance models proposed. A mutual interaction between scientific and instructional concerns can thus be envisaged. With respect to these general abilities in learning, thinking, and problem solving, information-processing analysis may have the most to offer to instruction, just as instructional efforts may have the most to offer to psychological knowledge.

REFERENCE NOTES

1. Wallace J.G. : The adaptation of instruction to individual differences: An information-processing approach. Paper presented at the meeting of the American Psychological Association, Honolulu, September 1972

2. Pellegrino J.W. Schadler M. : Maximizing performance in a problem solving task., Unpublished manuscript, University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center, 1974

REFERENCES

Bearison D.J. : The role of measurement operations in the acquisition of conservation. Developmental Psychology, 1969,(1), 653-660

Brownell W.R. Stretch L.B. : The effect of unfamiliar settings on problem solving. Durham N.C.: Duke University Research Studies in Education, 1931. (No. 1)

Bruner J.S. : Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics. The Sixty-third Yearbook of the National Society for the Study of Education (Pt. 1), 1964, (63), 306-335

Caruso J.L. Resnick L.B. : Task sequence and overtraining in children's learning and transfer of double classification skills. Pittsburgh: University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center, 1971. (LRDC Publication 1971/18)

Dienes Z.P. : Mathematics in the primary school. New York: St. Martin's Press, 1966

Dienes Z.P. : Building up mathematics. London: Hutchinson Educational Press, 1967

Furth H.G. : Piaget for teachers. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970

Gagnè R.M. : The acquisition of knowledge. Psychological Review, 1962, (69), 355-365

Gagnè R.M. : Learning hierarchies. Educational Psychology, 1968, (6), 1-9

Gagnè R.M.
Mayor J.R.
Garstens H.L.
Paradise N.E.
: Factors in acquiring knowledge of a mathematical task. Psychological Monographs, 1962 (76) (7, Whole No. 526)

Gelman R.
: Conservation acquisition: A problem of learning to attend to relevant attributes. Journal of Experimental Child Psychology, 1969 (7), 167-187

Glaser R.
Resnick L.B.
: Instructional psychology. Annual Review of Psychology, 1972, (23), 2o7-276

Groen G.J.
Parkman J.M.
: A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 1972, (79), 329-343

Groen G.J.
Poll M.
: Subtraction and the solution of open-sentence problems. Journal of Experimental Child Psychology, 1973,(16), 292-3o2

Holzman T.G.
: Process training as a test of computer simulation theory. Unpublished master's thesis, University of Pittsburgh, 1975

Hydle L.L.
Clapp F.L.
: Elements of difficulty in the interpretation of concrete problems in arithmetic. Bureau of Educational Research Bulletin No. 9. Madison: University of Wisconsin, 1927

Kamii C.
: An application of Piaget's theory to the conceptualization of a preschool curriculum. In R.K. Parker (Ed.), The preschool in action: Explaining early childhood programs. Boston: Allyn & Bacon, 1972

Katona G.
: Organizing and memorizing. New York: Columbia University Press, 1940

Klahr D.
: Stepts toward the simulation of intellectual development. In L.B. Resnick (Ed.), The nature of intelligence. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, in press

Kohlberg L.
: Early education: A cognitive-developmental view. Child Development, 1968,(39), 1013-1062

Kotovsky K.
Simon H.A.
: Empirical tests of a theory of human acquisition of concepts for sequential patterns. Cognitive Psychology, 1973, (4), 399-424

Luchins A.S.
Luchins E.H.
: Wertheimer's seminars revisited: Problem solving and thinking. Albany: Faculty-Student Association, State University of New York, 1970

Neimark E.D.
: Development of formal operations thinking. In F.D. Horowitz (Ed.), Review of child development research (Vol. 4). Chicago: University of Chicago Press, 1975

Piaget J. : Science of education and the psychology of the child. New York: Grossman Publishers, 1970

Piaget J. : Structuralism. New York: Harper & Row, Harper Torchbooks, 1970

Resnick L.B.
Beck I.L. : Designing instruction in reading: Interaction of theory and practice. In J.T. Guthrie (Ed.), Aspects of reading acquisition. Baltimore, Md.: Johns Hopkins University Press, in press

Resnick L.B.
Glaser R. : Problem solving and intelligence. In L.B.Resnick (Ed.), The nature of intelligence. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associations, in press

Resnick L.B.
Siegel A.W.
Kresh E. : Transfer and sequence in learning double classification skills. Journal of Experimental Child Psychology, 1971, (11), 139-149

Resnick L.B.
Wang M.C.
Kaplan J. : Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequenced introductory mathematics curriculum. Journal of Applied Behavior Analysis, 1973, (6), 679-710

Rohwer W.D. : Prime time for education: Early childhood or adolescence? Harvard Educational Review, 1971, (41), 316-341

Skinner B.F. : Science and human behavior. New York: Macmillan, 1953

Smedslund J. : Concrete reasoning: A study of intellectual development. Monographs of the Society for Research in Child Development, 1964, (29) (2, No. 93), 1-39

Smedslund J. : Determinants of performance on double classification tasks. I. Effects of covered vs. uncovered materials, labeling vs. perceptual matching, and age. Scandinavian Journal of Psychology, 1967, (8), 88-96. (a)

Smedslund J. : Determinants of performance on double classification tasks. II. Effects of direct perception and of words with specific, general, and no reference. Scandinavian Journal of Psychology, 1967, (8), 97-101. (b)

Suppes P.
Groen G. : Some counting models for first-grade performance data on simple addition facts. In J.M. Scandura (Ed.), Research in mathematics education. Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1967

Thorndike E.L. : The psychology of arithmetic. New York, Macmillan, 1924

Thorndike E.L.
Thurstone T.G. : Factorial studies of intelligence. Chicago: University of Chicago Press, 1941

Wang M.C. : Psychometric studies in the validation of an early learning curriculum. Child Development, 1973, (44) 54-60

Wang M.C.
Resnick L.B.
Boozer R.F. : The sequence of development of some early mathematics behaviors. Child Development, 1971, (42), 1767-1778

Wertheimer M. : Productive thinking (Enlarged ed.). New York: Harper & Row, 1959. (Originally published in 1945)

White R.W. : Learning hierarchies. Review of Educational Research. 1973, (43), 361-375

Woods S.S.
Resnick L.B.
Groen G.J. : An experimental test of five process models for subtraction. Journal of Fducational Psychology, 1975, (67), 17-21